

Matematika između realnog i virtualnog

– prikaz projekta

Sanja Antoliš, Aneta Copic, Eva Špalj, Zagreb



Europska unija
Ulaganje u budućnost



U veljači 2015. godine Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta objavilo je Poziv na dostavu projektnih prijedloga *Promocija kvalitete i unaprjeđenje sustava odgoja i obrazovanja na srednjoškolskoj razini*. Opći cilj poziva bio je uspostava odgojno-obrazovnog sustava koji omogućuje stjecanje znanja, vještina i stavova potrebnih za uspješan život i učenje u suvremenom društvu, a specifični je cilj bio uspostava programskih, kadrovskih i materijalnih uvjeta u gimnazijama koji će omogućiti stjecanje dodatnih kompetencija u području matematike, prirodoslovlja i informacijsko-komunikacijskih tehnologija. Na osnovu projektnih prijava odabrano je osamnaest projekata čije provedbe je financirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda, Operativnog programa Razvoj ljudskih potencijala.

Jedan od odabranih projekata bio je projekt *Matematika između realnog i virtualnog*. Nositelj projekta je XV. gimnazija, Zagreb, a partneri u projektu su XII. gimnazija, Zagreb, Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci i Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec. Projekt se provodio od listopada 2015. do listopada 2016. godine, a ukupni iznos sredstava bio je 1 016 019 HRK.

Ciljevi aktivnosti projekta bili su osuvremeniti pristup učenju i poučavanju matematike novim kurikulumom za fakultativnu nastavu u skladu s ishodima učenja te razviti kapacitete partnerskih ustanova za provedbu novog kurikuluma fakultativne nastave. U projektu su sudjelovali nastavnici, stručni suradnici i učenici partnerskih ustanova.

Projekt je realiziran u pet etapa – elemenata projekta:

- testiranje interesa za novim kurikulumom fakultativne nastave matematike i izrada nacrt novog kurikuluma
- izrada novog kurikuluma fakultativne nastave matematike u skladu s ishodima učenja
- osiguravanje materijalnih i ljudskih preduvjeta za provedbu novog kurikuluma fakultativne nastave matematike
- izrada nastavnih materijala za provedbu novog kurikuluma
- promocija novog kurikuluma fakultativne nastave matematike među učenicima, roditeljima i nastavnicima.

Sanja Antoliš, prof., Aneta Copic, prof., Eva Špalj, prof., XV. gimnazija, Zagreb, santolis@mioc.hr

Tijekom provedbe projekta održano je pet dvodnevnih radionica o izradi kurikuluma, ishodima učenja i vrednovanju te primjeni tehnologije u nastavi matematike. Na edukaciji je sudjelovalo tridesetak zaposlenika škola uključenih u projekt. Sedam nastavnika je sudjelovalo na studijskom putovanju u Lahr, Njemačka.

Izrađen je kurikulum fakultativne nastave matematike temeljen na ishodima učenja, određeni su kriteriji provjere usvojenosti ishoda učenja, izrađeni su i tiskani nastavni materijali i priručnik za nastavnike. Kurikulum i svi materijali objavljeni su na web-stranici XV. gimnazije http://www.mioc.hr/wp/?page_id=6488.

Kurikulum fakultativne nastave matematike

1. Opis fakultativne nastave matematike

U skladu sa suvremenim trendovima u obrazovanju, fakultativna nastava matematike treba biti orijentirana na učenika. Učenik mora biti u samome središtu odgojno-obrazovnog procesa, a ujedno i aktivno sudjelovati u procesu učenja. To se može postići korištenjem nastavnih materijala za samostalan rad učenika, koji ih vode da sami istražuju, otkrivaju i zaključuju, a nastavnik nadzire i po potrebi usmjerava njihov rad. Nastavni materijali koji su kreirani po načelu postupnosti omogućuju individualizirani pristup u kojemu učenik napreduje u skladu sa svojim sposobnostima i trenutačnom razinom matematičkih kompetencija pri čemu ga se potiče da postignutu razinu poveća.

Zbog potreba tržišta rada, važno je poticati suradničko učenje te uporabu tehnologije. Primjerena uporaba tehnologije u nastavi matematike doprinosi konceptualnom razumijevanju matematičkih sadržaja, smanjuje razinu apstrakcije, oslobađa učenika od proceduralnog računanja i stavlja u fokus matematičke ideje. Postavljanje i rješavanje matematičkih problema koji proizlaze iz stvarnih i smislenih životnih situacija može motivirati učenike za učenje matematike. Na taj se način uspostavlja veze između matematike i stvarnoga života te



drugih odgojno-obrazovnih područja i ljudske djelatnosti.

Strukturu fakultativne nastave čine *moduli*: Geometrija 1 i 2, Funkcije 1 i 2, Matrice i vektori, Modeliranje, Statistika i vjerojatnost, Financijska matematika, Teorija grafova, Optimizacija i Odabrane natjecateljske teme. Za izvođenje svakog modula predviđeno je 35 sati nastave i predloženo je vrijeme, odnosno razred u kojemu se modul može ponuditi učenicima.

2. Ciljevi fakultativne nastave matematike

Cilj je fakultativne nastave matematike potaknuti i razviti suvremeniji i drukčiji pristup matematici uz uporabu novih tehnologija, alata i ideja. Temeljem usvojenih matematičkih znanja samostalno, individualno ili suradnički, učenici će otkrivati i primjenjivati matematiku u raznim područjima i situacijama iz stvarnoga života. Cilj je kod učenika razviti logički način razmišljanja i zaključivanja, potaknuti kreativnost, poduzetnost, odgovornost, kritičnost i samostalnost u radu. Kroz prepoznavanje vrijednosti matematike razvit će se pozitivan stav prema matematici te popularizirati matematika općenito.

3. Opis modula i ishodi učenja

Pri odabiru i definiranju modula vodili smo se različitim potrebama partnerskih škola. Neki od modula predviđeni su nastavnim planom i programom za opće, jezične i klasične gimnazije. Ti su moduli opisani s manje detalja, a naglasak se stavlja na istraživačku nastavu i uporabu tehnologije koja je



u programima s malo sati matematike tjedno i tehničkih uvjeta škole teško provediva. Moduli koji su dio nastavnog plana i programa za matematičke gimnazije ili su dodatni sadržaji, detaljniji su u opisu i u ishodima učenja.

4. Učenje i poučavanje

Uz matematičke koncepte, fakultativnom nastavom matematike treba razvijati i matematičke procese kao što su rješavanje problema, samostalno zaključivanje, logičko mišljenje, argumentiranje, komuniciranje matematičkim jezikom, korištenje različitih prikaza, povezivanje matematike s osobnim iskustvima te učinkovitu primjenu tehnologije. Pozitivne emocije i stavovi podupiru razvoj samopoštovanja i pozitivne slike o sebi, a ključni su za motivaciju i trud koje će učenici uložiti u učenje. Upravo je zato važno da nastava učenicima bude izazovna, zabavna, poticajna, prilagođena i ugodna. U fakultativnoj nastavi matematike naglasak će biti na problemskoj, istraživačkoj i projektnoj nastavi uz primjenu elemenata igrifikacije i informatičke tehnologije. Želja nam je takvim radom povećati samostalnost i odgovornost učenika u procesu učenja.

Posebna pažnja posvećena je statusu djevojaka u znanosti te su dane preporuke za nastavnike kako dodatno potaknuti djevojke u području matematike i povećati njihovu uključenost u STEM područje.

5. Vrednovanje

Proces učenja prati kvalitetan način vrednovanja s jasnim kriterijima vrednovanja prilagođenim

učeniku, a redovita i razumljiva povratna informacija o radu i rezultatima usmjerena je motivaciji i napredovanju učenika te utvrđivanju efikasnosti poučavanja.

Kreirane su četverodimenzionalne trokrazinske rubrike (nastavnički primjerak i učenički primjerak) za četiri kriterija: matematički koncepti i primjene, komunikacija i prikazivanje, primjena tehnologije te samostalnost i odgovornost. One mjere kvalitetu ostvarenog na tri razine: izvrsno, dobro i potrebna podrška, pri čemu su jasno navedene očekivane izvedbe za svaku razinu.

Uz primjer rubrike nastavnicima i učenicima pripremljena je i *lista procjene*, odnosno tablica s popisom kriterija i elemenata kriterija u koju će moći zabilježiti razinu svoje uspješnosti.

Izrada nastavnih materijala za provedbu novog kurikuluma

Struktura nastavnih materijala

U izradi nastavnih materijala sudjelovalo je šesnaest nastavnika matematike iz partnerskih škola. Izrađeno je 67 nastavnih materijala iz različitih modula. Kako bi izrađeni nastavni materijali činili cjelinu, dogovorena su poglavlja koja čine jedinstvenu strukturu svih nastavnih materijala. Poglavlja započinju kratkim pitanjima ili zadacima:

- Što ćemo raditi? Rečenica, dvije koje učeniku govore o cilju aktivnosti, što će raditi.
- U čemu je problem? Kratak opis samog problema.
- Kako to izgleda? Učenici započinju analizirati podatke iz problema, skicirati i sl.
- Možete li pretpostaviti? Očekujemo pretpostavke o rješenjima, procjene nepoznatih veličina.
- Napravite model. Učenici izrađuju model koji može biti fizički, virtualni ili matematički.
- Potražite pomoć tehnologije. Primjenjuju tehnologije koja će im omogućiti istraživanje i otkrivanje rješenja.

- Kako bi to riješila teorija? Važan je korak u kojem će učenici matematičkim argumentima opravdati rješenja koja su uočili uz pomoć tehnologije.
- Možemo li više? Poglavlje za brže i sposobnije učenike, omogućava razlikovnost.
- Primijenite naučeno. Učenici primjenjuju stečeno znanje.
- Kako smo radili i što smo naučili? Potiče učenike na sažimanje i sistematiziranje, ali i na samovrednovanje.

Pokusno testiranje

U pokusnom testiranju nastavnih materijala za fakultativnu nastavu matematike sudjelovalo je četrnaest nastavnika i 364 učenika. Testirano je četrnaest nastavnih materijala. Nakon nastavnog sata učenici su ispunjavali anketu. U anketi su procjenjivali na skali od jedan do pet koliko se takav sat matematike razlikuje u odnosu na redovnu nastavu te koliko potiče interes i pažnju, bolje razumijevanje matematike, vlastitu aktivnost i samostalnost u radu, bolju suradnju među učenicima i stjecanje novih i korisnih znanja. Odgovorili su i na dva pitanja: Ako bi fakultativna nastava matematike izgledala ovako, biste li se uključili u nju i zašto? Ako bi fakultativna nastava matematike izgledala ovako, biste li je preporučili svojim prijateljima i zašto? Analiza anketa pokazala je da je većina učenika zadovoljna novim nastavnim materijalima. 61 % učenika bi se uključilo u fakultativnu nastavu, a čak 85 % bi ju preporučilo svojim prijateljima.

Učenici su kao razloge uključivanja u fakultativnu nastavu naveli: zanimljivo je, primjenjivo, zabavno, korisno, interakcija s tehnologijom, bolje razumijevanje, drukčije je, dobra je atmosfera i opuštenost, potiče na veću aktivnost, bolja je primjena znanja, povezuje znanje bitno za život s matematikom, pomaže za faks, potiče suradnju, samostalnost u radu, trajnije znanje, jednostavnije je i brže, zanimljivije od obične matematike, *cool* je, ne čini se komplicirano, ne moram crtati grafove ručno, jer je drukčije i zabavno, zato što se ne temelji samo na suhoparnom učenju, mogu lakše zapamtiti, zabavno je, zanimljivija i pristupačnija od redovne, puno lakše bi bilo, lakše nego crtanje rukom, zanimljivo

je i razlikuje se od uobičajenih sati, zabavno je i kreativno, volim matematiku i ovakav način rada, više mi se sviđa rad na računalu nego na ploči, pokazuje novi način učenja, bolja je atmosfera, zbog rada na računalu, interaktivna je i dolazi do suradnje, nema klasičnog računanja, nema testova, dobiva se novi pogled na matematiku, samostalno radimo, jer su informacije i nova znanja vezana uz stvarni život.

Kao razloge za ne uključivanje u fakultativnu nastavu naveli su: nemam vremena, ne zanima me, ne volim matematiku, oduzima mi vrijeme, a nije učinkovito, dovoljno je sati matematike u redovnoj nastavi, ne razumijem, ovo mi je presporo, volim raditi sama, dosadno mi je, nije mi lako shvatiti gradivo (ne znam se koristiti grafičkim džepnim računalom), nije zanimljiva, nije puno bolja od obične nastave, prekomplicirano je, dosadno je, jer mi ne ide matematika, ne razumijem se u računalu, osobno me geometrija ne zanima, treba biti upoznat s programom dinamične geometrije.

Dobivena je statistički značajna razlika u svih pet čestica između učenika koji žele i onih koji ne žele upisati fakultativnu nastavu. Učenici koji žele upisati fakultativnu nastavu matematike u odnosu na one koji ne žele, procijenili su nastavni sat zanimljivijim, bolje su razumjeli nastavne sadržaje, bili su aktivniji i samostalniji, stekli neka nova i korisna znanja, a interakcije među učenicima su bile kvalitetnije.

Na prve dvije čestice dobivena je statistički značajna razlika između mladića i djevojaka dok u ostale tri čestice nema statistički značajne razlike.

Rezultate pokusnog testiranja koristili smo u nastavku izrade materijala. Budući da je jedna od primjedbi nekih učenika bila da se ne znaju koristiti tehnologijom, napisali smo detaljnije upute za korištenje tehnologije.

Provedba fakultativne nastave

Na početku školske godine 2016./17. ponudili smo učenicima XV. gimnazije dva modula fakultativne nastave po ovom kurikulumu — *Teoriju grafova* i *Odabrane natjecateljske teme*. Za svaki modul predvidjeli smo 35 sati, odnosno jedan sat tjedno. U nastavu je uključeno nešto više od 15-ak

učenika po grupi. Za elemente ocjenjivanja koristit ćemo se spomenutim četirima kriterijima.

Predmet *Teoriju grafova* pohađaju učenici prvog i trećeg razreda nacionalnog programa i jedan učenik međunarodnog programa. Jedan se učenik redovito, a neki povremeno priključe nastavi iako nisu službeno upisali predmet.

Što je učenike zainteresiralo i privuklo *Teoriji grafova*?

- Suvremenost – jedna od novijih grana matematike koja ima široku primjenu i služi za rješavanje vrlo složenih problema iz stvarnog života kao što su problemi povezanosti, najkraćeg puta i sl.
- Veza s računarstvom. Pri rješavanju problema koriste se različitim algoritmima kojima su se neki učenici koristili u programiranju na nastavi informatike, što je većinu učenika dodatno zainteresiralo jer se žele baviti programiranjem.
- Izrada projekta. Naime, unutar modula je predviđeno 10-ak sati za projektnu nastavu gdje će učenici u manjim skupinama raditi na rješavanju konkretnog problema iz stvarnog života.
- Nije potrebno složeno matematičko predznanje.

Primjer zadatka koje učenici rješavaju koristeći se teorijom grafova:

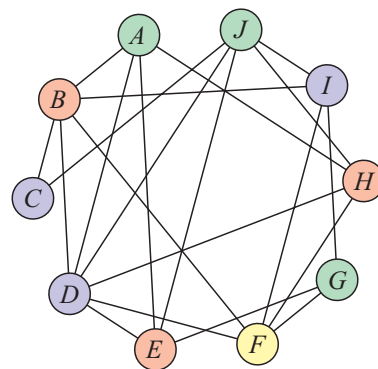
Primjer: *Tulum*

Tina je odlučila organizirati tulum iznenađenja svojoj baki i djedu za pedesetu godišnjicu braka. Odlučila je pozvati njima najbliže rođake i prijatelje, ukupno trideset osoba. Dok je razgovarala s nekima od njih, pojavio se problem. Deset osoba izrazilo je međusobno neslaganje s nekima od pozvanih i htjeli su izbjeći druženje s njima za istim stolom. Kako u dvorani nema mjesta za više od četiri stola, a svaki je za osam osoba, Tina nije znala može li udovoljiti njihovim željama i smjestiti ih za različite stolove. Hoće li biti dovoljno stolova da se izbjegnu nesuglasice i da oni koji se međusobno ne slažu ne sjede za istim stolom? Može li Tina riješiti problem i kako? Neslaganja su prikazana u tablici gore desno.

Rješenje. Raspored sjedenja modelirat ćemo grafom čije ćemo vrhove obojiti tako da dva susjedna vrha nisu obojena istom bojom. Neslaganje je

Rodak ili prijatelj	Izbjegava osobe
<i>A</i>	<i>B, D, H</i>
<i>B</i>	<i>C, F, I</i>
<i>C</i>	<i>B, J</i>
<i>D</i>	<i>B, F, H</i>
<i>E</i>	<i>A, D</i>
<i>F</i>	<i>B, G, H, I</i>
<i>G</i>	<i>E</i>
<i>H</i>	<i>J</i>
<i>I</i>	<i>B, G</i>
<i>J</i>	<i>D, E, H, I</i>

prisutno između deset osoba koje smo prikazali vrhovima grafa, a njihova međusobna neslaganja označena su bridom koji spaja ta dva vrha. Susjedni vrhovi ne mogu biti obojeni istom bojom (jer je bar jedna od tih dviju osoba izrazila neslaganje s onom drugom). Najmanji broj boja potreban za opisano bojenje iznosi četiri. To znači da Tina može riješiti problem i smjestiti za četiri stola ovih deset osoba, a onda i preostale.



Jedan je razmještaj, primjerice:

Stol 1: *A, G, J* + nekih 5 osoba (od preostalih 20 osoba koje nisu izrazile neslaganje)

Stol 2: *B, E, H* + nekih 5 osoba (od preostalih 15 osoba koje nisu izrazile neslaganje)

Stol 3: *C, D, I* + nekih 5 osoba (od preostalih 10 osoba koje nisu izrazile neslaganje)

Stol 4: *F* + preostalih 5 osoba.

Zaključak

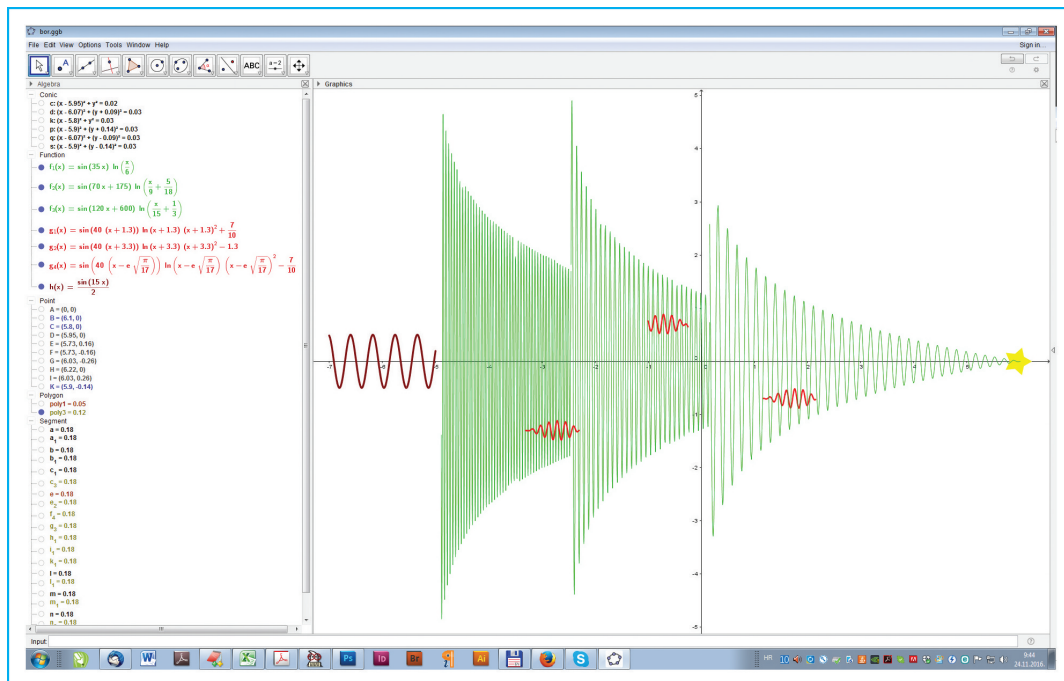
Kurikulum fakultativne nastave matematike s jasno iskazanim ishodima učenja razvijen je uzimajući

suvremene trendove u obrazovanju. Kroz projekt i kurikulum nas je vodila potreba za promjenama u metodama poučavanja matematike i važnost pristupa matematici koji zahtijevaju veliku odgovornost i angažman. Svrhovito i promišljeno poučavanje matematike razvija učenikovo samopouzdanje i samosvijest o vlastitim potencijalima, a logičko, kritičko i proceduralno mišljenje razvijeno na fakultativnoj nastavi matematike postat će alat kojim će se služiti u svim aspektima života.

LITERATURA

- 1/ J. Anić i sur. (2016.): *Kurikulum fakultativne nastave matematike*, XV. gimnazija, Zagreb.
- 2/ S. Banić i sur. (2016.): *Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta Matematika – prijedlog*, pristupljeno 10.7.2016., <http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/03/Matematika.pdf>.
- 3/ J. Anić i sur. (2016.): *4. vježbenica Financijska matematika, Teorija grafova, Optimizacija*, XV. gimnazija, Zagreb.

Projekt je sufinancirala Europska unija iz Europskog socijalnog fonda.



Izradila u GeoGebri Marina Njerš, prof. savjetnica, Gimnazija "Fran Galović", Koprivnica