Parketi iz pravilnih mnogokuta

A. N. Kolmogorov

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903. – 1987.)

jedan je od najvećih matematičara XX. stoljeća. Bio je svestran, što je prava rijetkost za znanstvenike novoga doba i svojim je radovima obogatio sasvim raznorodna područja matematičke znanosti, matematičku logiku, topologiju, funkcionalnu analizu, teoriju diferencijalnih jednadžbi, teoriju informacija, a bavio se i primjenama matematičkih metoda u tehnici, lingvistici i biologiji. No osobito valja istaknuti njegov doprinos teoriji vjerojatnosti. Tu se u prvom redu misli na njezino aksiomatsko zasnivanje čime je ta znanost dobila čvrste matematičke temelje. (“Osnovni pojmovi Teorije vjerojatnosti”, 1936.)

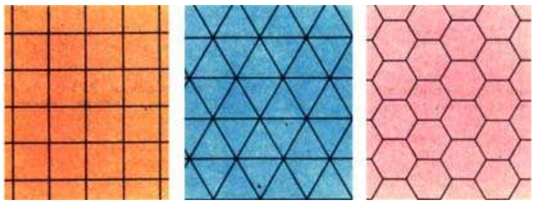
Djelovao je na čuvenom Moskovkom univerzitetu (MGU) i pod njegovim se mentorstvom razvila ruska matematička škola s mnoštvom vrhunskih matematičara.

Kolmogorov se vrlo predano bavio problemima nastave sudjelujući u stvaranju školskih programa i pisanju školskih udžbenika. I sam se iskušao kao srednjoškolski nastavnik, a osobito je poticao i podržavao rad s nadarenim učenicima. Bio je jedan od pokretača i glavni urednik čuvenog popularno-znanstvenog časopisa KVANT, koji je prešao granice Sovjetskog Saveza pa ga čitaju srednjoškolci diljem cijeloga svijeta. Zbog njegove vrhunske kvalitete, Amerikanci KVANT i danas prevode na engleski jezik.

Prilog koji objavljujemo u ovom broju MŠ-a Kolmogorovljev je tekst prenešen iz Kvanta broj 8 iz 1986. godine.

Što je parket?

Jednostavan i nezanimljiv parket dobijemo ako ravninu razložimo na sukladne kvadrate, onako kako je to prikazano na slici 1.a). Ovdje dva kvadrata imaju ili zajedničku stranicu ili zajednički vrh, ili pak nemaju zajedničkih točaka.



a) b) c)

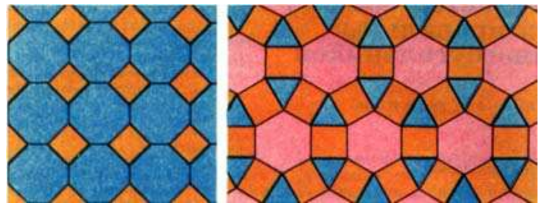
Sl. 1.

Parketom ćemo nazivati takvo popločenje ravnine pravilnim mnogokutima, pri kojem dva mnogokuta imaju ili zajedničku stranicu, ili zajednički vrh ili nemaju zajedničkih točaka.

Vjerojatno ste vidjeli parket složen iz pravilnih osmerokuta i kvadrata (slika 2.a)). Lijep parket možemo složiti i iz pravilnih šesterokuta, kvadrata i jednakostraničnih trokuta (slika 2.b)).

Parket daje lijep dojam ako je dovoljno simetričan. *Figura je simetrična, ako je možemo položiti na samu sebe na "netrivijalan" način (to znači, ne tako da sve točke ostanu na svojem mjestu).*

Primjerice, na slici 2.b), rotiramo li cijelu mrežu vrhova i stranica, što je tvori parket iz šesterokuta, kvadrata i trokuta, za 60° oko središta jednog od šesterokuta, dobit ćemo istu mrežu vrhova i stranica. Središte svakog šesterokuta toga parketa je centar simetrije šestog poretka. [1]



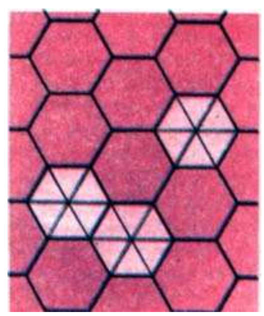
a) b)

Sl. 2.

Zadatak 1. Nađite sve centre simetrije četvrtog, trećeg i drugog reda parketa prikazanog na slici 2.a).

Što je pravilni parket?

S gledišta simetrije, naša definicija parketa nije najsretnija. Njome su obuhvaćeni i parketi koji nemaju nikakve simetrije. Uzmemo li obični parket složen iz šesterokuta, slika 1.c), možemo ga "pokvariti" ako neke od šesterokuta podijelimo na šest trokuta. Lako je vidjeti kako smo dobili novi parket u smislu naše definicije. No možemo dokazati (probajte!), da ako razdijelimo primjerice tri šesterokuta, kao što je prikazano na slici 3) sve ostale ostavimo nedirnute, dobit ćemo parket bez ikakve simetrije.



Sl. 3.

Kako bismo otklonili nelijepe i nedovoljno simetrične parkete, uvest ćemo sljedeću definiciju:

[1] Točka O zove se centar simetrije n-toga poretka neke figure, ako se pri rotaciji te figure oko O za $\frac{360^\circ}{n}$ ona preslika na samu sebe.

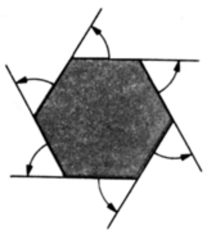
Parket nazivamo pravilnim, ako ga možemo položiti na sama sebe (poklopiti) tako da proizvoljno izabran njegov vrh položimo na bilo koji drugi vrh parketa.

Zadatak 2. Dokažite da su parketi na crtežima 1 i 2 pravilni i konstruirajte sami još koji pravilni parket.

Osnovna zadaća

Pokazuje se da možemo opisati sve pravilne parkete. Ako je zadana duljina h stranice mnogokuta parketa, tada postoji samo konačan broj različitih parketa (koji se ne mogu poklopiti). Koliko, o tome vam neću ovdje govoriti. Sve ih prebrojiti i tako odgovoriti na pitanje o njihovu broju, to i jest osnovna zadaća, koju valja riješiti.

Nekoliko napomena



Sl. 4.

Rješenje zadatka prirodno je započeti s istraživanjem ustrojstva vrhova parketa. Pravilni n-terokut ima n vanjskih kutova (slika 4), i njihov je zbroj jednak četiri prava kuta (u to se sami uvjerite). Zbog toga je svaki kut pravilnog n-terokuta jednak

$$\alpha_n = 2d - \frac{4d}{n} = 2\left(1 - \frac{2}{n}\right) d.$$

U vrhu parketa sastaju se mnogokuti kojima je zbroj kutova jednak $4d$. Tako je

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}d, \quad \alpha_4 = d, \quad \alpha_6 = \frac{4}{3}d, \quad \alpha_8 = \frac{3}{2}d,$$

a za parkete, prikazane na slikama 1 i 2, imamo:

$$4\alpha_4 = 4d,$$
$$6\alpha_3 = 4d,$$
$$3\alpha_6 = 4d,$$
$$\alpha_4 + 2\alpha_8 = 4d,$$
$$\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 = 4d.$$

U općem slučaju, označimo li sa m_n broj n-terokuta koji se sastaju u jednom vrhu n-terokuta, moramo dobiti

$$\sum m_i \alpha_i = 4d, \qquad (1)$$

gdje su uključeni pribrojnici s indeksima i za koje je $M_i > 0$, te $\alpha_i = 2(1 - \frac{2}{i})d$.

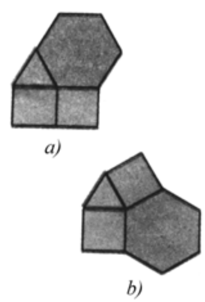
Prvi se naš zadatak sastoji u tome da nađemo sva rješenja jednadžbe (1) s cijelim $m_i > 0$. Jednadžbu (1) kratimo s $2d$ pa je možemo pogodnije zapisati u obliku

$$\sum m_i \left(1 - \frac{2}{i}\right) = 2. \qquad (2)$$

Za svako rješenje jednadžbe (2) treba istražiti odgovarajuće rasporede mnogokuta uz vrh. Primjerice, rješenju $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, $m_6 = 1$,

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) + 2\left(1 - \frac{2}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{6}\right) = 2,$$

odgovaraju vrhovi u kojima se sastaju jedan trokut, dva kvadrata i jedan šesterokut. Njih je moguće rasporediti na dva u suštini različita načina (slike 5.a) i b)). No lako je pokazati (dokažite), da rasporedu a) ne odgovara nikakav pravilni parket.



Sl. 5.

Upute su dovoljne. Primite se posla!