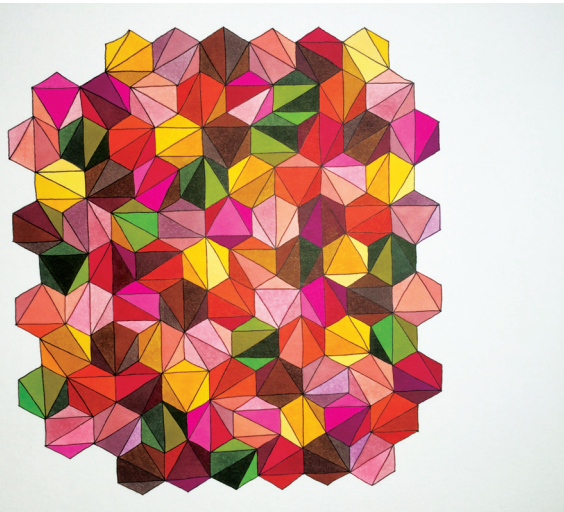


Catalanovi brojevi, 1. dio



Neven Elezović, Zagreb

Uvod

Tradicionalna nastava matematike na tehničkim fakultetima temeljila se na programu matematičke analize, nadopunjenom dijelovima linearne algebre, teorije vjerojatnosti i numeričke matematike. Taj se program realizira kroz više, najčešće četiri predmeta za koje je prihvaćen uobičajeni naslov *Viša matematika*.

Razvoj tehnologije bitno je promijenio i sadržaje studija. Računalna tehnologija postaje bitan faktor i u područjima koja nisu direktno vezana uz nju. Naravno, studij računarstva zahtijeva drukčiji odabir temeljnih matematičkih znanja. Na Fakultetu elektrotehnike i računarstva svi studiji započinju zajedničkom prvom godinom, a onda se tijekom druge godine događa račvanje između računarstva i inih studija. Potrebna matematička znanja za studij računarstva su drukčija od onog za studij (elektro)tehnike, ona pripadaju području koji se kolokvijalno naziva *diskretna matematika*, a osim dijelova linearne algebre i teorije vjerojatnosti uključuje u sebi kombinatoriku, teoriju grafova, dijelove opće algebre, matematičke logike i elementarne teorije brojeva.

Moj je stav da se u fakultetskoj nastavi matematike treba uzeti u obzir i različitost mogućnosti pa onda i potreba pojedinih studenata. Oni koji mogu i žele više, to trebaju i dobiti. Stoga sam prije pet godina pokrenuo inicijativu za uvođenje novih predmeta na prvoj i drugoj godini studija na Fakultetu elektrotehnike i računarstva.

Prenosim dio pisma koje sam tom prilikom napisao dekanu FER-a.

“Smatram da najbolji studenti zahtijevaju posebnu pažnju i dodatni trud, 10 % studentske elite bit će odgovorno za 90 % svekolikog napretka i novih vrijednosti u budućnosti. Mišljenja sam da studente ne treba izdvajati iz njihove sredine u okviru redovno organiziranih predmeta, stvaranjem neke “ α -grupe” koja bi radila po posebnom programu, to nije dobro niti za njih, a niti za njihove kolege kojima najbolji studenti izrazito pomažu u svladavanju redovnog gradiva. Za takve studente treba organizirati dodatne sadržaje, do granica njihovih sposobnosti.

U materijalima koje prilažem nalaze se prijedlozi za dva kolegija napredne matematike koja bi se održavala tijekom drugog i trećeg semestra. Nivo nastave bio bi potpuno elementaran, ali složen, s izabranim temama koje proširuju postojeće gradivo, daju znanja vrlo iskoristiva u nastavku studija i na način da maksimalno potiču samostalni rad kroz algoritamski pristup konkretnim problemima.

Pri slaganju ovog programa pregledao sam literaturu od nekoliko desetaka knjiga kao i iskustva boljih svjetskih sveučilišta. Osnovna ideja naslanja se na sadržaj kolegija “*Concrete mathematics*” koji se godinama održavao na Stanford University i prema kojemu je napisana izvrsna knjiga [1]. Međutim, taj je sadržaj usklađen s našim programom kako ne

bi dolazilo do preklapanja s redovitim predmetima i proširen temama za koje ja smatram da su korisne i interesantne studentima tog uzrasta.”

Fakultetsko vijeće je prihvatilo ovaj prijedlog i nastava za ta dva predmeta održava se već petu godinu. Predmete sam nazvao *Diskontna matematika 1 & 2*. Poput *Concrete mathematics* koja nikakve veze nema niti s konkretnim niti s betonskim stvarima, ova matematika ne bavi se jeftinim stvarima sumnjive kvalitete i cijene, već je riječ o kombinaciji odabranih poglavlja **diskretne**, **kontinuirane** i **napredne** matematike.

Nakon pet godina provjere u radu sa studentima, napisao sam udžbenik za predmet *Diskontna matematika 1*. Mislim da teme koje su obrađene u njemu mogu biti od velike važnosti i nastavnicima u srednjoj školi. Zato sam odlučio dijelove knjige predstaviti i u našem časopisu, s dodatnim komentarima, primjerima i primjedbama koji ciljaju k tome da ove i slične teme budu dostupne i nastavnicima i najboljim učenicima srednjih škola. Složeniji dijelovi ovih poglavlja, kao i oni koji zahtijevaju predznanja koja se na ovom mjestu ne mogu dati, su izostavljeni. Sve zainteresirane upućujem na knjigu [2]. Tekst u ovom broju Miš-a napisan je na temelju petog poglavlja udžbenika [1].

Motivacija. Projekt Anno Domini

Zadavanje projekta

Zadatak projekta *Anno Domini* u godini 2012. glasio je: U nizu znamenaka

1 2 3 4 5 6 7 8 9

postavi znakove dopuštenih operacija tako da rezultat bude jednak 2012.

Ideju za ovaj problem dobio sam pri pogledu na slavljeničku tortu Donalda Knutha, profesora *emeritusa* na Stanford University.



Na ovoj torti svaka znamenka niza tvori zasebni broj, no ja sam dopustio i *konkatenaciju*, sljubljiva-nje susjednih znamenaka. Precizniji opis zadatka dan je u nastavku.

Zadatak se može rješavati na nekoliko različitih nivoa složenosti, ovisno o vrsti dopuštenih operacija.

1. razina. Dopuštena je uporaba samo četiriju osnovnih operacija. Prioritet operacija se čuva (množenje i dijeljenje obavlja se prije zbrajanja i oduzimanja), a operacije istog ranga izvršavaju se slijeva nadesno. Na primjer, za 2010 i 2011 moguća rješenja su:

$$12 \cdot 34 \cdot 5 + 6 \cdot 7 - 8 \cdot 9 = 2010$$

$$1 + 2345 \cdot 6 / 7 + 8 - 9 = 2010$$

$$1 / 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 67 - 8 + 9 = 2011$$

$$1 \cdot 2 / 3 \cdot 45 \cdot 67 - 8 + 9 = 2011.$$

2. razina. Dopuštena je uporaba zagrada. Na primjer,

$$1 + 2 + 3 \cdot (4 \cdot (5 + 6) \cdot (7 + 8) + 9) = 2010$$

$$1 + (2 + 34) \cdot 56 - 7 - 8 + 9 = 2011.$$

3. razina. Dopuštena je uporaba operacije potenciranja:

$$(1 + 2 + 3)^4 + (5 + 6) \cdot (7 \cdot 8 + 9) = 2011.$$

4. razina. Dopušten je zapis broja u drugoj bazi:

$$1 + (2 + 3) \cdot (4 + 56_78) + 9 = 2010$$

jer je $56_78 = 5 \cdot 78 + 6 = 396$.

Rezultati

Zadatak je u ovom obliku bio postavljen studentima prve generacije. Broj rješenja nadmašio je očekivanja. Među dobivenih nekoliko stotina rješenja, ako se izbacе ona koja su sadržajno ekvivalentna, postoji preko dvije stotine različitih.

Na 1. razini postoji točno sedam rješenja za dostizanje broja 2012, od kojih su neka vrlo zanimljiva:

$$\begin{aligned} &1+2345 \cdot 6/7-8+9 \\ &1+2/3 \cdot 45 \cdot 67-8+9 \\ &12+34 \cdot 56+7+89 \\ &-12/3+4 \cdot 567 \cdot 8/9 \\ &123+45 \cdot 6 \cdot 7+8-9 \\ &1-2-3+4 \cdot 567 \cdot 8/9 \\ &1234-5-6+789. \end{aligned}$$

Na 2. razini, a pogotovo na ostalim, postoji više stotina rješenja. Izdvojit ću, radi uštede prostora, samo nekolicinu. U knjizi [2] odabrao sam veći broj rješenja, pa upućujem čitatelja na tu referencu.

$$\begin{aligned} &1-2-34+(5 \cdot 6-7) \cdot 89 \\ &1 \cdot 2 \cdot 34 \cdot (5 \cdot 6-7/(8+9)) \\ &1 \cdot 2+3+4 \cdot (56+7) \cdot 8-9 \\ &1-(2-345) \cdot 6-7 \cdot 8+9 \\ &(12/3) \cdot (456+7 \cdot 8-9) \\ &1-(2^3)^4+5+678 \cdot 9 \\ &(1-2+(3+4)^5)/6-789 \\ &((1-2/3) \cdot 4^5-6) \cdot (7+8-9) \\ &12^3+4 \cdot (-5-6-7+89) \\ &12/3 \cdot ((-4)^{(5-6+7)/8-9}) \\ &1-2-3 \cdot 4+(5 \cdot 67 \cdot 8) \cdot 9 \\ &((1+(2 \cdot (3 \cdot 4))) \cdot 5) \cdot (678-9). \end{aligned}$$

Godinu dana kasnije

U usporedbi s godinom 2012. činilo se da 2013. nije toliko prikladna kao rješenje ovog problema.

Rezultati su to opovrgli, broj rješenja je nadmašio one iz prethodnih godina. Evo nekoliko odabranih, najprije rješenje koje se koristi bazom 1000:

$$1 + 23 \cdot (4 \cdot 5 \cdot (6 \cdot 7 + 8)) + 9$$

ili ovog prekrasnog dubleta s varijacijama operacije zbrajanja i baze:

$$\begin{aligned} &12 + 345 \cdot 6 - 78 + 9, \\ &12 \cdot 345 \cdot 6 - 78 + 9. \end{aligned}$$

Konačno, tu je i prelijepo rješenje s najmanjim brojem "pravih" operacija

$$12/34 \cdot 5678 + 9$$

kao i još jedno na prvoj razini:

$$12 + 3/4 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 8 - 9.$$

Od godine 2014. ukinuo sam treću i četvrtu razinu, pokazalo se da su prve dvije sasvim dovoljne za postizanje svih ciljeva.

Koji su to ciljevi? Da bi dobio rješenja ovog problema, student mora naučiti nešto što u trenutku zadavanja problema sigurno ne zna. Iako je riječ o vrsnim programerima, problem je pretežak da bi ga riješili bez dodatnog matematičkog znanja. Student mora naučiti kako se u nizu znamenaka mogu postaviti zagrade, da bi se ispitale sve dopuštene kombinacije. Nakon što nauči sve o zagradama, tad mora naučiti kako da te dopuštene izraze napiše ne koristeći se zagradama, što ga vodi u područje matematičke logike i inverzne poljske notacije. Veza između ovih dvaju pristupa, s uporabom zagrada i bez njih, realizira se s pomoću grafova. Ti su pojmovi sadržaj ovog poglavlja.

Postoji 109 rješenja za godinu 2014. te 349 rješenja za godinu 2015., na razinama 1 i 2. Nisam siguran da su sva rješenja suštinski različita. Izdvojit ću najprije tri najkraća

$$\begin{aligned} &1234 + 5 \cdot (67 + 89) = 2014 \\ &-1 + 2 - 3 + 4 \cdot 567 \cdot 8/9 = 2014 \\ &(1 \cdot 2 + 3 + 45 \cdot 6) \cdot 7 + 89 = 2014. \end{aligned}$$

Faktorizacija broja 2014 je $2 \cdot 19 \cdot 53$, a vi je pronađite u ovom umnošku:

$$(-1 - 2 + 345) \cdot (6 + (7 - 8)/9).$$

Ili možda u ovom?

$$(1 - (2/3 - 4) \cdot 5) \cdot (6 \cdot 7 + 8 \cdot 9).$$

Ovdje se do rješenja dolazi zbrajanjem razlomaka:

$$-1/2 - (3/4 - 5) \cdot 6 \cdot (7 + 8 \cdot 9).$$

Od 349 rješenja za godinu 2015 izdvojiti ću samo ona na razini 1:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 - 3 + 4 \cdot 567 \cdot 8/9 \\ &12 \cdot 3 + 45 \cdot 6 \cdot 7 + 89 \\ &12 \cdot 34 \cdot 5 - 6 \cdot 7 + 8 + 9 \\ &-1 + 2 \cdot 34 \cdot 5 \cdot 6 - 7 - 8 - 9 \end{aligned}$$

Godina gospodnja 2016 faktorizira se kao

$$2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

i bojim se predvidjeti broj rješenja koja ću dobiti ove godine.

Kao što možete naslutiti, ja ne znam koliki će taj broj rješenja biti. Moji studenti će to saznati. Naravno, ja se nisam niti potrudio napisati program koji bi doveo do rješenja, a pitanje je bih li to u modernim programima koje rabe moji studenti i znao napraviti. Veseli me da će to moji studenti znati. Učitelj koji je u svemu bolji od svojih učenika nije dobar učitelj, jer ne pomiče granice spoznaja.

Postupak rješavanja

Standardni način rješavanja ovog problema jest, naravno računalom, tako da se generiraju svi mogući oblici dopuštenih nizova i onda evaluiraju njihove vrijednosti. Da bi taj način bio prihvatljiv, potrebno je predvidjeti ukupan broj takvih nizova i načiniti algoritam za njihovo generiranje.

Generiranje niza može se provesti u dvije faze, koje razlikuju prvu razinu od druge. Pri rješavanju problema na prvoj razini, dovoljno je napisati niz oblika:

$$\star 1 \star 2 \star 3 \star 4 \star 5 \star 6 \star 7 \star 8 \star 9.$$

Ovdje na mjestu $\star$ možemo alternirati predznake $+$ ili $-$, a na mjestu $\star$ bilo koji od simbola

$$\star \in \{+, -, \cdot, /, \varnothing\}.$$

Tu $\varnothing$ označuje prazan simbol koji zapravo znači da se dvije znamenke vežu jedna uz drugu.

Time vidimo da je broj mogućih nizova ograničen sa $2 \cdot 5^8$. Jednom kad je niz napisan, lako je evaluirati njegovu vrijednost.

Također, jasno je da se u ovu shemu uklapaju i treća, odnosno četvrta razina, s time da se na odgovarajući način poveća skup dopuštenih operacija za simbol $\star$.

Situacija se bitno komplicira uvođenjem zagrada.

Postavljanje zagrada i Catalanovi brojevi

S obzirom na to da u algebarskom izrazu zagrade imaju najveći prioritet (u smislu da se prvo računa izraz unutar svakog para zatvorenih zagrada), očito je da se za svaki niz odabranih operacija moraju uzeti u obzir i svi mogući rasporedi računanja uvjetovani postavljanjem zagrada.

Time se postavljaju pitanja: Na koliko se načina zagrade mogu postaviti unutar niza $1 \star 2 \star 3 \star 4 \star 5 \star 6 \star 7 \star 8 \star 9$? Kako će se dobiveni niz evaluirati?

Sad ćemo odgovoriti na prvo postavljeno pitanje, o broju različitih načina. Odgovor na drugo pitanje bit će analiziran u poglavlju o poljskoj (inverznoj) notaciji.

Uvijek je korisno krenuti od početnih pozicija. Zagrade se među tri broja mogu postaviti na dva različita načina:

$$(1 \star 2) \star 3, \quad 1 \star (2 \star 3).$$

Kad su četiri broja u pitanju, odnosno tri operacije među njima, postoji pet različitih postavljanja:

$$\begin{aligned} &((1 \star 2) \star 3) \star 4 \\ &(1 \star (2 \star 3)) \star 4 \\ &(1 \star 2) \star (3 \star 4) \\ &1 \star ((2 \star 3) \star 4) \\ &1 \star (2 \star (3 \star 4)). \end{aligned}$$

Koliko različitih postavljanja postoji u nizu od $(n+1)$ brojeva? Na ovo je pitanje prvi odgovor dao belgijski matematičar Eugene Catalan (1814. – 1894.). Njemu u čast, traženi se brojevi nazivaju *Catalanovi brojevi*.

Označimo n -ti Catalanov broj s C_n . Izvest ćemo temeljnu rekurzivnu relaciju za niz brojeva (C_n) .

Rekurzivna relacija za Catalanove brojeve

Promotrit ćemo broj C_{n+1} . On odgovara broju postavljanja zagrada u nizu od $(n+2)$ brojeva, koji posjeduje $(n+1)$ algebarsku operaciju. Neka su u tom nizu raspoređene zagrade koje određuju porijekak obavljanja operacija.

Opći oblik jednog takvog niza je ovakav:

$$(a_1 * a_2 * \dots * a_{k+1}) * (a_{k+2} * \dots * a_{n+2}).$$

Ovdje je istaknuta ona operacija koja se posljednja obavlja. Zato ona nije okružena nikakvim zagradama. Lijevo od nje nalazi se izraz koji se sastoji od $(k+1)$ brojeva, pa unutar njega zagrade možemo rasporediti na C_k načina, $0 \leq k \leq n$. Desno se nalazi izraz koji se sastoji od $(n-k+1)$ brojeva. Unutar njega zagrade se mogu rasporediti na C_{n-k} načina. Dakle, u ovom slučaju ukupan je broj načina za postavljanje zagrada jednak $C_k C_{n-k}$.

Ovaj račun može se izvesti za svaki k , $0 \leq k \leq n$, uz odgovor $C_0 = 1$. Tako dolazimo do definicije:

Catalanovi brojevi

Catalanovi brojevi definirani su rekurzivnom relacijom $C_0 = 1$,

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

Sad iz $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ slijedi na primjer

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0 = 5$$

i lako se mogu odrediti vrijednosti nekolicine narednih članova ovoga niza.

Slijedeća tablica govori kako će brzo njihov broj rasti:

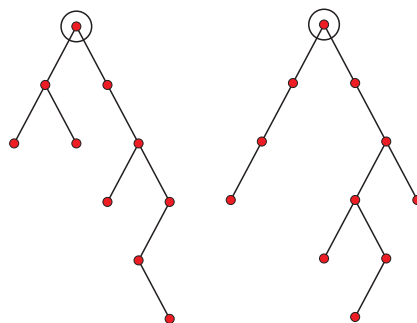
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Na temelju rekurzivne relacije može se izvesti eksplicitna formula za Catalanove brojeve. U tom se računu koristi tehnika *funkcija izvodnica* u koje se na ovom mjestu ne možemo upuštati. Detalji su dani u [2]. Ovdje navodimo samo traženu eksplicitnu formulu za n -ti Catalanov broj:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

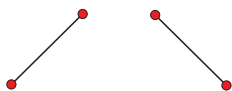
Binarna stabla

Jedna potpuno drukčija struktura ekvivalentna je ovom problemu postavljanja zagrada. To je struktura **binarnih stabala**. Stablo je povezani graf koji ne sadržava petlje. Ako je broj njegovih vrhova jednak n , onda on sadržava točno $(n-1)$ brid.



Slika 1. Binarno stablo

Mi ćemo sad prebrojiti sva *usmjerena binarna stabla*. Dva su takva stabla nacrtana na slici. Njihova je karakteristika da posjeduju jedan istaknuti vrh, na slici zaokružen, iz kojeg cijelo stablo raste. (Za razliku od pravih, ova stabla crtamo tako da rastu prema dolje.) Pritom, iz svakog vrha mogu slijediti najviše dva brida. Zato stablo nazivamo *binarnim*. Nadalje, položaj bridova, *ulijevo* ili *udesno* čini razliku. Tako će postojati točno dva stabla reda 2 (s dva vrha).

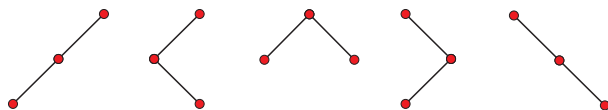


Slika 2. Binarna stabla reda dva

Time smo dokazali da je broj binarnih stabala uistinu Catalanov broj.

Binarna stabla i problem zagrada

Postoji točno pet različitih binarnih stabala reda 3:



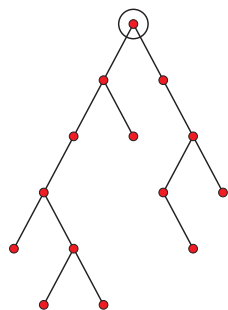
Slika 3. Binarna stabla reda tri

Postavljanje zagrada unutar algebarskog izraza može se također jednoznačno povezati s odgovarajućim binarnim stablom. U nizu podataka duljine $(n+2)$, poredak operacija jednoznačno je određen izborom točno n parova zagrada – poput ovih u primjerima s početka poglavlja:

Nastavite ovo prebrojavanje i skicirajte svih 14 različitih binarnih stabala reda 4.

Broj binarnih stabala s n vrhova označimo s C_n . Taj se broj naziva *Catalanov broj*.

Rekurzivnu relaciju za C_n odredit ćemo ovako. Eliminacijom istaknutog vrha vidimo da se binarno stablo raspada u dva odvojena stabla (od kojih neko može biti prazno) kojima je zbroj broja vrhova za jedan manji.



Slika 4. Rekurzivna formula za binarna stabla

Nazovimo ta stabla *lijevim* i *desnim*. Neka je ukupan broj vrhova cijelog stabla jednak $(n+1)$. Eliminacijom istaknutog vrha ostaje onda n vrhova, od kojih se k nalazi u lijevom, a $(n-k)$ u desnom dijelu stabla. Broj različitih podstabala ove veličine je C_k , odnosno C_{n-k} . Zato vrijedi sljedeća rekurzivna relacija:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

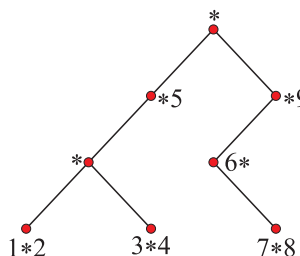
$((1*2)*3)*4$, $(1*2)*(3*4)$ ili $1*((2*3)*4)$.

Prvi par zagrada okružuje jednu operaciju (i dva podatka). Svaki sljedeći par zagrada okružuje jednu novu operaciju. Na koncu, ostat će točno jedna operacija koja nije okružena zagradama. To je operacija koja se izvršava posljednja. Uočimo je u svakom od gore navedenih triju primjera.

Sad izrazu pridružujemo binarno stablo prema sljedećem pravilu. Pridruživanje je *rekurzivno*.

Posljednoj operaciji pridruži se istaknuti vrh binarnog stabla. Izraz lijevo od te operacije predstavlja lijevi podgraf, a izraz desno od te operacije predstavlja desni podgraf.

Uvjerimo se da se na ovaj način iz svakog binarnog grafa može dobiti algebarski izraz i obratno. Sljedeće slike ilustriraju te veze.

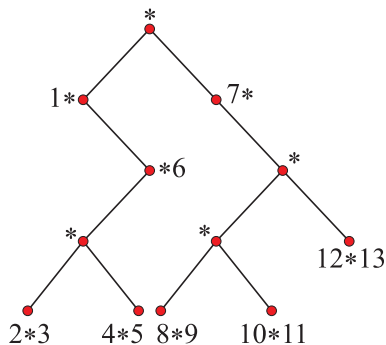


Slika 5.

Ovo stablo odgovara sljedećem rasporedu zagrada:

$((((1*2)*(3*4))*5)*((6*(7*8))*9))$.

Još jedan primjer:

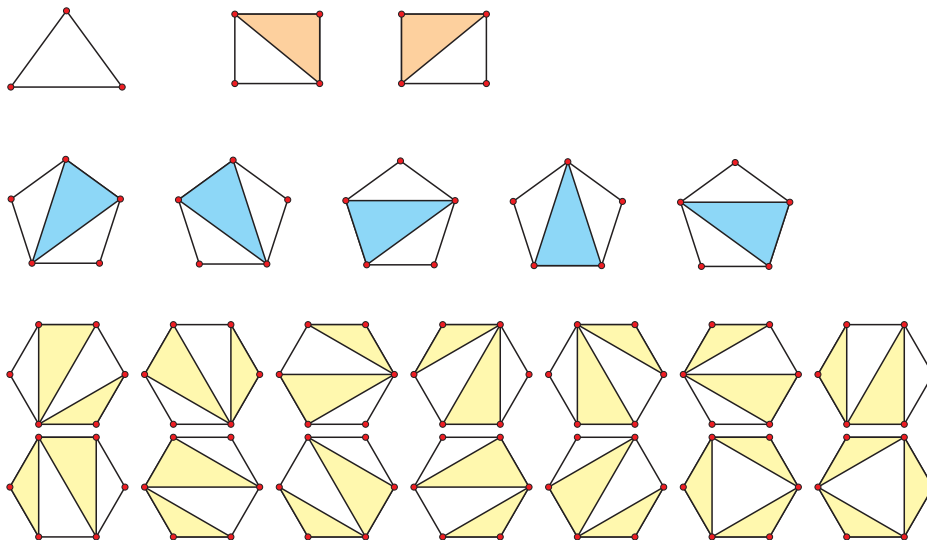


Slika 6.

Sad postoji 12 vrhova u grafu, pa je ukupno raspoređeno 12 operacija. Argumente od 1 do 13 raspoređujemo na sljedeći način. U krajnjim vrhovima raspoređena su po dva argumenta. U vrhovima iz kojih slijede dvije grane nema pripadnog argumenta. U vrhovima s jednom granom nalazi se jedan argument.

Grani koja je postavljena lijevo odgovaraju argumenti s manjim rednim brojem. Tako dobivamo sljedeći zapis ovog grafa:

$$(1 * (((2 * 3) * (4 * 5)) * 6) * (7 * ((8 * 9) * (10 * 11)) * (12 * 13))).$$



Slika 7. Podjele mnogokuta

Začudujuće je u koliko se naoko potpuno različitih, a istovremeno zanimljivih situacija, javljaju Catalanovi brojevi. Ovo će poglavlje biti posvećeno nekim od tih primjera.

Eulerov susret s Catalanom

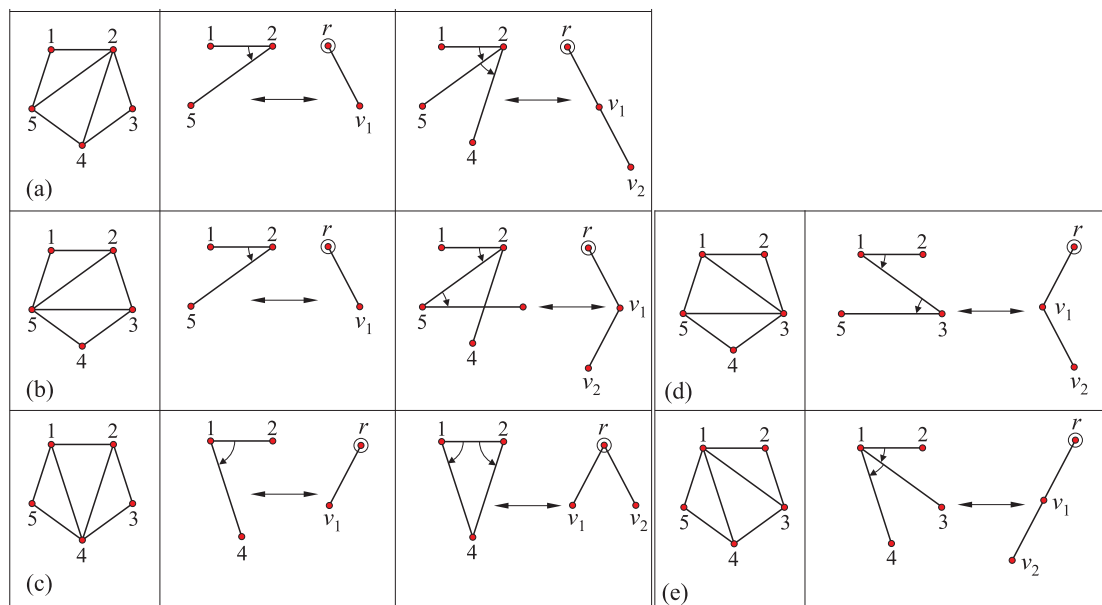
Opišimo sad geometrijski problem koji je zadao Leonhard Euler. Unutar konveksnog mnogokuta s $(n + 2)$ vrhova povučene su dijagonale koje se međusobno ne sijeku, a dijele mnogokut na n trokuta. Na koliko se načina to može učiniti?

Na slici 7 napisane su sve podjele za $n = 1, 2, 3$ i 4. Broj tih podjela iznosi 1, 2, 5 odnosno 14.

Pokazat ćemo da je broj svih mogućih podjela ponovno dan Catalanovim brojem, mnogokut s $(n + 2)$ vrha može se podijeliti na C_n načina.

Tvrdnju ćemo dokazati tako da povežemo dvije različite strukture: podjelu mnogokuta i binarna stabla.

U tu ćemo svrhu stranicu mnogokuta koja povezuje vrhove 1 i 2 poistovjetiti s istaknutim vrhom binarnog stabla. Podjela mnogokuta načinjena je sada nizom dijagonala. Ukupan broj povučenih dijagonala mora biti jednak $(n - 1)$. Taj se niz dijagonala



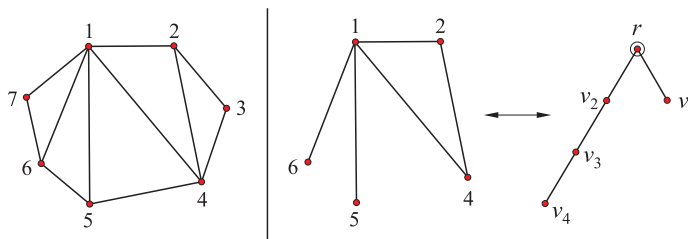
Slika 8. Podjele i binarna stabla

može prirodno poredati tako da svake dvije dijagonale koje sudjeluju u podjeli imaju točno jedan zajednički vrh.

Budući da ima zajednički vrh s prethodnom, svaka se dijagonala može dobiti iz prethodne (ili prve stranice) rotacijom oko zajedničkog vrha. Ako je ta rotacija u *pozitivnom smjeru*, pridružit ćemo joj desni brid binarnog stabla. Ako je rotacija u *negativnom smjeru*, pridružit ćemo joj onda lijevi brid binarnog stabla.

Na slici 8 su opisani postupci pridruživanja svih pet grafova reda 3. Promotrimo pomno te slike i pratimo način konstrukcije bridova binarnog stabla.

Na koncu, odaberimo jednu od mogućih podjela u mnogokutu s većim brojem stranica i konstruirajmo odgovarajuće stablo.



Slika 9. Podjele i binarna stabla

LITERATURA

- 1/ Neven Elezović, *DisKontNa matematika 1*, Element, Zagreb 2016.
- 2/ Ronald Graham, Donald Knuth, Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2ed, Addison Wesley, Reading 1994.