Zabavni zadatak

u vezi s kretanjem puža: Što sam naučio iz studentskih i učeničkih odgovora?

Josip Sliško, Puebla, México

Zabavni zadatak u kojem puž izlazi iz bunara ili se penje na stup krećući se gore-dolje je vjerojatno jedan od najpopularnijh u svom žanru. U MiŠ-u broj 83 prikazana je malo poznata ali poučna povijest njegova pogrešnog rješavanja od strane čuvenih matematičara (Sliško 2016.).

Što se tiče prisustva zadatka u školskoj aritmetici, zanimljiva su dva detalja njegova prvog pojavljivanja u najpoznatijem engleskom udžbeniku elementarne aritmetike, koji je 1746. godine napisao svećenik i učitelj Thomas Dilworth. Prvi detalj je njegova formulacija u potpuno drukčijem kontekstu:

Izračunana udaljenost između Londona i Yorka je 150 milja. Jedan čovjek krene iz Londona i prvo ide prema Yorku 20 milja, a onda se vraća prema Londonu 15 milja. Koliko vremena će proći prije nego stigne na kraj svog putovanja?

(Dilworth 1752., Pitanje 91, str. 166.)

Drugi detalj je Dilworthov pogrešan odgovor "30 dana". Točan odgovor "27 dana" bit će prezentiran učenicima tek u 23. engleskom izdanju, objavljenom 1787. godine (7 godina nakon Dilworthove smrti i 40 godina nakon prvog izdanja). Međutim, odgovor "30 dana" će nastaviti postojanje barem do 11. američkog izdanja koje se pojavilo 1825. godine!

Malo je matematičkih problema toliko puta, s toliko različitih razloga i formulacija, spomenuto u časopisima američkog Nacionalnog savjeta nastavnika matematike. Evo pet primjera u prilog toj tvrdnji:

Jedan majmun, u bunaru dubokom 25 stopa, penje se četiri stope tijekom dana, ali se noću kliže natrag tri stope. Koliko će dana biti potrebno majmunu da dosegne vrh bunara? (Odgovor nije 25 dana.).

(Earl 1966.)

Jedan majmun je na dnu bunara od 30 stopa. On se, svakodnevno, penje tri stope i klizne dvije stope nadolje. Kada on doseže vrh?

(Bradfield 1970.)

Žabac Kermit je pao u rupu duboku 10 metara dok je šetao šumom. Svakog dana je mogao skočiti samo 3 metra uz zid rupe. Svake noći je kliznuo nadolje 2 metra. Koliko dana je trebalo Kermitu da izađe iz rupe?

(Jensen & O'Neil 1982.)

Jedan žabac je na dnu bunara dubokog 10 metara i širokog 2 metra na vrhu. Prvog dana se popne 5 metara, ali noću klizne nadolje 4 metra. Ako to isto radi svakog dana, kojeg dana će izaći iz bunara?

(van de Walle, O'Daffer, & Charles 1988.)

Jedan puž je na dnu bunara od 10 stopa. Svakog dana se penje nagore 3 stope, ali noću klizne nadolje 2 stope. Koliko dana će mu trebati da izađe iz bunara?

(Kelly 1999.)

Popularnosti zadatka doprinosi i činjenica da se njime koriste autori knjiga o rješavanju matematičkih problema namijenjenih nastavnicima, kako u formulaciji s pužem (Posamentier & Krulik 2009.; Schnabel & Trapp 2014.) tako i u formulaciji sa žapcem (Posamentier & Krulik 2008.).

Unatoč velikoj popularnosti problema i poznatom fenomenu njegova "brzog rješavanja", gotovo da i ne postoji istraživačka literatura koja izvještava o finim detaljima učeničkog traženja rješenja. Jedine dvije studije koje su mi poznate odnose se

Josip Sliško, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

na semantičku analizu učeničke *chat*-komunikacije tijekom rješavanja problema (Schreiber 2013.) i na istraživanje potencijala pripremljenih "kognitivnih alatki" (crteži i tablice) koje se daju učenicima da bi im se olakšalo nalaženje rješenja (Reuter, Schnotz & Rasch 2015.).

Moje korištenje problema s pužem koji se penje i spušta

Problem s pužem koji se penje i spušta privukao je moju pažnju početkom 2008. godine kada sam počeo skupljati materijal za pripremu novog kolegija "Razvoj sposobnosti kompleksnog mišljenja". O razlozima za korištenje zagonetki i problema zabavne matematike u podučavanju studenata o zamkama koje nam postavlja rutinsko mišljenje već sam pisao u ovom časopisu (Sliško 2015b.).

Formulacija za koju sam se opredijelio bila je sljedeća:

Ne navodeći razloge, jedan puž želi stići na vrh stupa visokog 10 metara. Tijekom dana se popne 3 metra, ali se tijekom noći spusti za 2 metra. Za koliko dana i noći će puž stići na vrh stupa?

a) 7 dana b) 8 dana c) 9 dana d) 10 dana.

Iskreno govoreći, pomalo sam se pribojavao da je problem previše poznat i da je prelagan za studente koji žele studirati fiziku. Studentska rješenja su pokazala da nisam bio u pravu. Značajan broj studenata je birao odgovor "10 dana", tako da je problem odigrao zamišljenu ulogu jasnog indikatora prisustva "brzog mišljenja".

Ugodno iznenađenje bile su dvije grupe neočekivanih studentskih rješenja. Neki vizualno nadareni studenti su problem rješavali korektnom upotrebom grafova "prijeđeni put – vrijeme".

Studenti koji imaju dara za algebarsko modeliranje našli su rješenje na sljedeći način:

Neka je x broj dana u kojima se puž penje po 3 metra, a y broj noći u kojima se spušta za 2 metra. Kretanje puža se može modelirati preko sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 10 \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

Rješenja ovog sustava su $x = 8$ i $y = 7$. Dakle, puž stiže na vrh stupa nakon 8 dana i 7 noći.

Ova rješenja su mi omogućila da obogatim studentske aktivnosti, tražeći da oni svoja prva rješenja problema (obično, aritmetička ili tablična) provjeravaju grafički i algebarski.

Grafičko rješenje je dozvoljavalo i dodatno produbljivanje mijenjanjem položaja referentne točke u odnosu na koju se određuje položaj puža. Ona se, bez posebnog razmatranja, uzima u podnožju stupa. Za studente je bio veliki izazov naći oblik grafa kada se referentna točka postavi na vrh ili na sredinu stupa. Nikada neću zaboraviti njihovo oduševljenje kada su "otkrili" da vrijednosti položaja puža ovise, a da oblik grafa ne ovisi o položaju referentne točke.

Dodatni potencijal situacije sa zagonentnim kretanjem puža je tražiti od učenika da nađu netrivijalnu razliku između puževa ukupnog prijeđenog puta i pomaka. Tu sam mogućnost iskoristio u svom udžbeniku fizike "Fizika 1. Vježbaonica uma" (Sliško 2009.).

Početno istraživanje učeničkih rješenja problema s pužem koji se penje i spušta

U kolegiju "Filozofija znanosti", koji sam 2010. godine održao za studente matematike, govorio sam i o važnosti i metodologiji edukacijskih istraživanja koja moraju biti empirijska osnova "filozofije pedagoških znanosti". Nekim studentima se svidjela ideja i željeli su je isprobati u slučaju učenja matematike. Kako nisam znao kakva je situacija u nastavi matematike, jedini problem koji sam "imao pri ruci" bio je problem s pužem koji se penje i spušta. Student Carlos Morales je pokazivao najviše interesa, jer je osim matematike studirao i za nastavnika matematike. Zbog povijesnih i političkih razloga, ta dva studija su u Meksiku potpuno odvojena.

U preliminarnom istraživanju smo našli da većina učenika između 13 i 14 godina daje odgovore "10 dana i 10 noći" ili "10 dana i 9 noći". Ono što nas je iznenadilo bili su odgovori koji su se temeljili na "pogađanju" proizvoljnih kombinacija broja dana i noći koje "izbacuju" korektnu vrijednost visine stupa (10 metara). Jedno od tih "rješenje" je bilo: četiri dana i jedna noć! Argument je bio sljedeći: $(4 \cdot 3\text{ m}) - (1 \cdot 2\text{ m}) = 10\text{ m}$.

U formalnom istraživanju, koje je provedeno 2011. godine, učenici su, pored svojih rješenja za problem puža, trebali ocijeniti rješenje "četiri dana i jedna noć”. Opcije odgovora su bile: “Rješenje je točno.”, “Rješenje nije točno.” i “Ne znam kako da ocijenim to rješenje.” Svaki odgovor je trebao biti argumentiran.

Rezultati su bili jako informativni. 35 % učenika je smatralo da je rješenje točno jer računske operacije daju točnu visinu stupa. Nije teško zaključiti da ti učenici, zahvaljujući pogrešnoj nastavi, vjeruju da je matematika tek puki skup računskih operacija bez ikakve veze sa stvarnim svijetom. Jedine greške u matematici su, prema tom vjerovanju, greške u izvođenju tih operacija.

Zanimljivi su argumenti 47 % učenika koji smatraju da je rješenje “četiri dana i jedna noć” pogrešno. Većina njih (62 %) odbacuju rješenje samo zbog toga jer se razlikuje od njihovog koje je, po njihovom mišljenju “točno”. Na primer: “Nije točno jer puž treba 10 dana i 10 noći.”

Relativno manji broj učenika (38 %) je iskazao sposobnost kritičkog mišljenja i korištenja znanja iz realnog svijeta. 26 % učenika je prepoznalo činjenicu da četiri dana ne mogu proći, a da ne prođu tri noći. Taj argument, baziran na osnovnim činjenicama poimanja smjene dana i noći, smo očekivali (doduše kod znatno većeg broja učenika).

Međutim, 12 % učenika je ponudilo argument koji nismo predvidjeli. Oni su odbacili rješenje “četiri dana i jedna noć” kritički analizirajući njegovu implikaciju u kontekstu problema: “Puž se ne može popeti na visinu od 12 metara ako je stup visok samo 10 metara.”

Ova epizoda pokazuje da učenici imaju potencijale kreativnog i kritičkog mišljenja koji ostaju nerealizirani jer im jednostavno ne dajemo priliku da pokažu što sve znaju i mogu napraviti.

Aktualna istraživanja učeničkih rješenja problema s pužem

Zahvaljujući spomenutom interesu studenata, počeo sam držati kolegije povezane s edukacijskim istraživanjima u učenju matematike. Kako sam imao iskustva u analizi udžbenika iz fizike, bilo mi je prirodno da za temu istraživanja sa studentima odaberem analizu udžbenika iz matematike. Zanimale su nas artificijelne kontekstualizacije problema iz matematike koje učenicima stvaraju nepotrebne teškoće u razumijevanju i učenju matematičkog modeliranja (Sliško 2015a.).

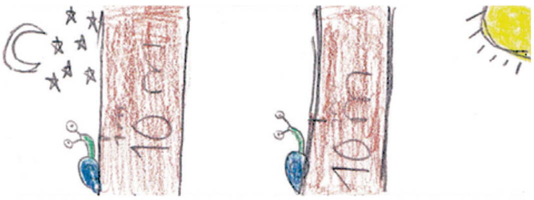
Pokazalo se da se u udžbenicima matematike ne posvećuje dovoljna pažnja niti razlici između “situacijskog modela” (detaljna mentalna predodžba situacije na koju se odnosi problem) i “matematičkog modela” (maksimalno pojednostavljenog modela situacije) niti se učenicima daju upute kako se misaono i praktično ostvaruje prijelaz od “situacijskog modela” do “matematičkog modela”. Jasno je da učenici koji nisu u stanju ostvariti taj prelaz, ne mogu naći matematičko rješenje koje se temelji na “matematičkom modelu”.

Tu je ideju moguće eksprimentalno istraživati upravo na problemu puža koji se penje i spušta. Moje magistrandice Carolina Cenobio i Dalila Sánchez su nedavno, s učenicima od 14 do 17 godina, preliminarno istražile:

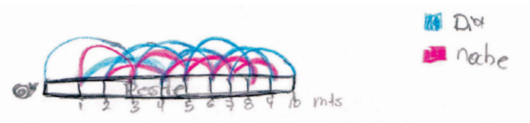
1) Kakve su učeničke spontane vizualizacije (crteži) situacije koja je implicitno opisana u različitim formulacijama problema s pužem (korištenje cijelih brojeva, decimalnih brojeva i razlomaka)?
2) Kakav tip spontanih vizualizacija omogućava nalaženje točnog rješenja?

Prema klasifikaciji koje su predložile Hegarty i Kozhenikova (1999.), učenički crteži se mogu podijeliti na “zorne” (slika 1) i “shematske” (slika 2). Kroz shematske crteže učenici nastoje iskazati matematički model situacije ili proniknuti u kvantitativnu bit problemske situacije zanemarujući nebitne pojavne detalje.

Pokazalo se da učenici koji uspijevaju doći do točnog odgovora najčešće prezentiraju neku she-



Slika 1. Zorna spontana vizualizacija problema s pužem



Slika 2. Shematska vizualizacija problema s pužem (Dia = Dan; Noche = Noć)

matsku reprezentaciju situacije, dok učenici koji daju netočan odgovor "ostaju" na zornom nivou kojim dominiraju nevažni situacijski detalji.

Zaključak

Povijest matematike i njene nastave pokazuje da su zadatci, koji imaju istu matematičku strukturu kao zabavni zadatak s kretanjem puža, pogrešno rješavani, kako od strane vrhunskih matematičara (Fibonacci i Calandri) tako i od strane autora jednog od najpopularnijih engleskih udžbenika elementarne aritmetike u 18. st. (Dilworth). Ta činjenica implicira da današnja pogrešna učenička rješenja nisu dokaz njihove intelektualne inferiornosti nego signal da i oni, kao i matematičari i učitelji iz prošlih vremena, koriste u rješavanju "brzo mišljenje" koje ne uzima u obzir rubne uvjete zadatka.

Prostor ne dozvoljava da detaljnije komentiram i ostale zanimljive rezultate spomenutog probnog istraživanja. Pokazalo se, na primjer, da na učenička rješenja utječu korištenje razlomaka u formulaciji problema, redoslijed ponuđenih odgovora i razina njihova kognitivnog razvoja. Međutim, ono što želim preporučiti nastavnicima matematike je sljedeće:

Učenički odgovori, kako u problemu kretanja puža tako i u svim ostalim problemima zabavne matematike, predstavljaju zanimljivo i uzbudljivo polje istraživanja, apsolutno nužno za poboljšanje nastave matematike. U tom istraživanju, originalnost neočekivanih, kako točnih tako i netočnih rješenja, za sve je nastavnike – istraživače pravi "nebeski dar" koji višestruko nagrađuje trud i vrijeme uloženo u analizu i razumijevanje autentičnog učeničkog matematičkog mišljenja.

Na kraju moram parafrazirati lijepu misao koju je iskazao poznati brazilski pedagog Paulo Freire: Edukacija se ne odvija kada učenici uče od nastavnika. Prava edukacija se odvija kada i nastavnik uči od učenika.

LITERATURA

1/ D. L. Bradfield: *Sparking interest in the mathematics classroom*, The Arithmetic Teacher, 17(3), 239–242, 1970.

2/ T. Dilworth: *The schoomasters assistant: being a compendium of arithmetic, both practical and theoretical*, 6. izd., London: Henry Kent, 1752.

3/ W. Earl: *An iconoclastic elementary school mathematics program*, The Arithmetic Teacher, 13(6), 489–491, 1966.

4/ M. Hegarty & M. Kozhevnikov: *Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving*, Journal of educational psychology, 91(4), 684, 1999.

5/ R. Jensen & D. R. O'Neil: *Classical Problems for All Ages*, The Arithmetic Teacher, 29(5), 8–12, 1982.

6/ J. A. Kelly: *Improving problem solving through drawings*, Teaching Children Mathematics, 6(1), 48–51, 1999.

7/ A. S. Posamentier y S. Krulik: *Problem solving in mathematics, Grades 3–6: Powerful strategies to deepen understanding*, Thousand Oaks, CA: Corwin, Problem 9.2, 2009.

8/ A. S. Posamentier y S. Krulik: *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions, Grades 6–12: A Resource of the Mathematics Teacher*, Second Edition, Thousand, Oaks, CA: Corwin Press, Problem 7.19, 2008.

9/ T. Reuter, W. Schnotz & R. Rasch: *Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school*, American Journal of Educational Research, 3(11), 1187–1197, 2015.

10/ J. Schnabel & A. Trapp: *Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen-Musteraufgaben-Materialien 1.–4. Klasse*, Donauwörth: Auer Verlag, 2014.

11/ C. Schreiber: *Semiotic processes in chat-based problem-solving situations*, Educational Studies in Mathematics, 82(1), 51–73, 2013.

12/ J. Slisko: *Física 1. El gimnasio de la mente*, Naucalpan de Juárez: Pearson Educación, Problema por resover "Un caracol trepador", p. 69, 2009.

13/ J. Sliško: *Neadekvatna kontekstualizacija problema u školskoj fizici i matematici: Koje su moguće negativne posljedice u učeničkim vjerovanjima?*, MiŠ 80, 195–199, 2015a.

14/ J. Sliško: *Zagonetke u nastavi i učenju kompetencija: razlozi, izbor i didaktički dizajn*, MiŠ 82, 61–67, 2015b.

15/ J. Sliško: *Zabavni zadatak u vezi s kretanjem puža – dvije epizode malo poznate ali poučne povijesti matematike*, MiŠ 83, 132–135, 2016.

16/ J. van de Walle, P. G. O'Daffer, & R. I. Charles: *Problem Solving: Tips For Teachers*, The Arithmetic Teacher, 35(5), 26–27, 1988.