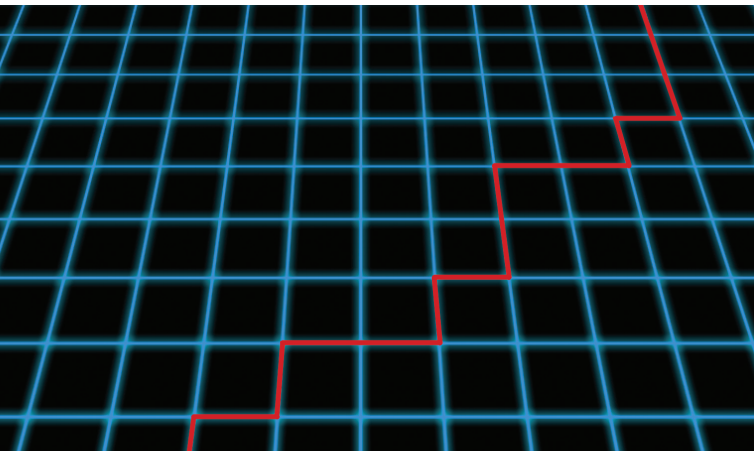


Catalanovi brojevi, 2. dio



Neven Elezović, Zagreb

U ovom ćemo nastavku proučiti vezu Catalanovih brojeva s binomnim koeficijentima.

U prvom nastavku upoznali smo Catalanove brojeve. Okarakterizirali smo ih na dva načina. To je niz brojeva (C_n) za koji vrijedi $C_0 = 1$, $C_1 = 1$ i

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

Eksplisitna formula za n -ti Catalanov broj je

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Dakle, Catalanovi su brojevi povezani s binomnim koeficijentima.

Binomni se koeficijenti najčešće definiraju preko eksplicitne formule:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Mi ćemo ovdje odabrati alternativni pristup i definirati binomne koeficijente rabeći kombinatoriku.

Binomni koeficijenti, definicija i svojstva

Binomni koeficijent

Neka skup S ima n elemenata. (Pišemo: $|S| = n$.) Binomni koeficijent, oznaka $\binom{n}{k}$, jednak je broju načina na koji se iz ovog skupa može odabrati podskup od k elemenata.

Istaknimo neka svojstva binomnih koeficijenata.

Rubne vrijednosti

Postoji samo jedan podskup bez ijednog elementa. Jednako tako, samo jedan podskup ima uključene sve elemente skupa. Zato vrijedi

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Svojstvo simetrije

Svakom podskupu A od k elemenata odgovara točno jedan podskup $\bar{A}$ od $n - k$ elemenata, koji sadržava točno one elemente koje A ne sadržava. (Tu je $\bar{A} = S \setminus A$ komplement skupa A .) Zato je

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Rekurzivna relacija

Binomni koeficijenti zadovoljavaju na tisuće manje ili više zanimljivih identiteta. Izdvojit ćemo i dokazati najvažnije među njima. Prvi je na popisu sljedeći identitet.

Pascalova formula

Vrijedi sljedeći identitet:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (1)$$

Izdvojimo jedan istaknuti element x skupa S . Podskupove skupa S koji imaju točno k elemenata možemo rastaviti u dvije disjunktne klase, već prema tome sadrže li element x ili ne, $S_k = A \cup B$. U klasi A nalaze se oni podskupovi koji sadrže element x , a u klasi B oni podskupovi koji ga ne sadrže. Budući da su A i B disjunktne, vrijedit će:

$$|S_k| = \binom{n}{k} = |A| + |B|.$$

Prebrojimo sad broj podskupova u klasi A . Budući da svaki od njih sadrži element x , tih podskupova ima onoliko na koliko načina preostalih $(k-1)$ elemenata možemo izabrati iz ostatka skupa S , jer je jedan element, x , već izabran. Zato je $|A| = \binom{n-1}{k-1}$.

Skup B sastoji se od onih podskupova duljine k koji ne sadrže element x . To znači da elemente tih podskupova možemo birati po volji među $(n-1)$

elementom skupa S . Zato je $|B| = \binom{n-1}{k}$. Prema tome, vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

i tvrdnja je dokazana.

Računanje binomnog koeficijenta

Broj načina na koji možemo izabrati povjerenstvo od k članova iz skupa od n osoba i nakon toga odabrati predsjednika povjerenstva je

$$\binom{n}{k} \cdot k.$$

Isti se postupak može načiniti i tako da najprije odaberemo predsjednika, a zatim članove njegova povjerenstva iz ostatka od $n-1$ osobe:

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Dakle, vrijedi:

$$\binom{n}{k} \cdot k = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

i odavde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Iteriranjem ove rekurzivne relacije dobivamo:

Eksplisitna formula za binomni koeficijent

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \end{aligned} \quad (2)$$

Ovaj se razlomak može napisati s pomoću faktorijske funkcije:

Prikaz binomnog koeficijenta s pomoću faktorijske

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3)$$

Formula (3) izgleda jednostavnije, no za računanje konkretnih vrijednosti binomnog koeficijenta prikladnija je (2). Naime, prije računanja je korisno skratiti brojnik i nazivnik, a prvi postupak skraćivanja upravo je prelazak s posljednje formule na prethodnu.

Pri računanju "malenih" binomnih koeficijenata, koristimo se svojstvom simetrije i nakon toga primjenjujemo formulu (2). Tako na primjer, binomni koeficijent

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

nećemo početi računati kraćenjem ovog razlomka, već ćemo prije toga primijeniti formulu

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

odakle se lako iščitava vrijednost **120** za ovaj binomni koeficijent.

Vandermondeov identitet¹

Za svaki prirodni broj n vrijedi identitet:

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}. \quad (4)$$

Lijeva strana predstavlja broj odabira n elemenata iz unije dvaju skupova R i S , za koje vrijedi $|R| = r$, $|S| = s$. Ti se podskupovi mogu podijeliti u disjunktne klase, prema broju k elemenata koji su uzeti iz prvog skupa. Iz skupa R se k elemenata može odabrati na $\binom{r}{k}$ načina, a preostalih $n-k$ elemenata iz skupa S na $\binom{s}{n-k}$ načina. Zbrajanjem po svim mogućnostima za k dobivamo traženu formulu:

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}.$$

¹Alexandre-Théophile Vandermonde (1735. – 1796.)

Primjer. Poseban je slučaj Vandermondeova identiteta sljedeći identitet:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Naime, zbog svojstva simetrije binomnih koeficijenata pribrojnici u izrazu slijeva mogu se napisati u obliku:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

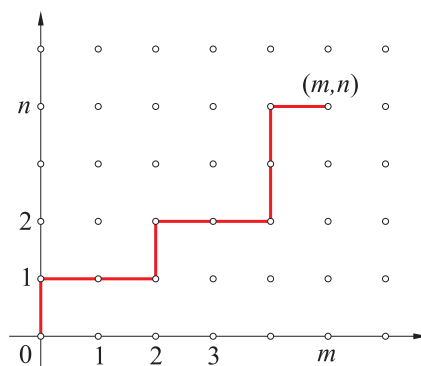
i sad je dovoljno primijeniti Vandermondeov identitet za $r = s = n$.

Šetnje po cjelobrojnoj rešetki

Binomne koeficijente i Catalanove brojeve interpretirat ćemo promatrajući šetnje po cjelobrojnoj rešetki.

U koordinatnom sustavu izdvojimo točke s cjelobrojnim koordinatama. Taj ćemo skup zvati **cjelobrojna rešetka**.

Pretpostavit ćemo da naša šetnja počinje u ishodištu i da su dopuštena samo dva načina prelaska iz jedne točke u drugu: **udesno**, iz točke (i, j) u $(i+1, j)$, te **prema gore**, iz točke (i, j) u $(i, j+1)$. Ovdje su i i j nenegativni cijeli brojevi. Neka je D oznaka za korak udesno, a G za onaj prema gore.



Šetnja po cjelobrojnoj rešetki

Na slici je nacrtan graf jedne šetnje koja kreće iz ishodišta i završava u točki s koordinatama (m, n) .

Postavlja se pitanje: *koliko različitih šetnji ima koje povezuju točke $(0, 0)$ i (m, n) ?* Označimo taj broj sa $L(m, n)$.

Odgovor na ovo pitanje lako je dati. Broj svih šetnji odredit ćemo na temelju sljedećeg razmišljanja. Svaka je šetnja jednoznačno određena rasporedom svojih koraka. Na primjer, jedna od šetnji iz familije $L(5, 2)$ izgleda ovako: DGDDGDD, jer u tijeku šetnje moramo napraviti pet koraka udesno i dva prema gore. Sve šetnje iz $L(m, n)$ sastoje se od m koraka udesno i n koraka prema gore. Dakle, tih šetnji ima onoliko koliko i različitih načina da se odabere n koraka "prema gore" iz skupa od $m + n$ ukupnih koraka. To se može učiniti na $\binom{m+n}{n}$ načina.

Proste šetnje

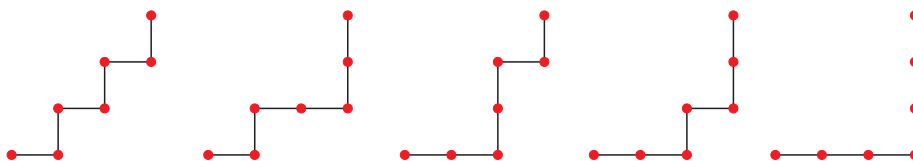
Broj svih prostih šetnji iz ishodišta do točke (m, n) jednak je

$$L(m, n) = \binom{m+n}{n}.$$

Catalanove šetnje.

Princip zrcaljenja

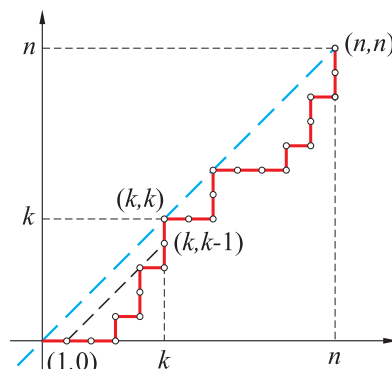
Promotrit ćemo sve šetnje koje kreću iz $(0, 0)$, a završavaju u (n, n) , i pritom nikad ne prelaze dijagonalu. Pokazat ćemo da je njihov broj jednak Catalanovu broju C_n .



Catalanove šetnje

Na slici su navedene sve različite Catalanove šetnje za $n = 3$.

1. rješenje. Promotrimo trenutak u kojem čestica prvi put dotakne dijagonalu. To se mora dogoditi, ako ne prije, a onda u točki (n, n) . Neka se to dogodi u točki (k, k) . Tad prvi dio puta izgleda ovako: prvi potez mora biti D, a posljednji potez, kojim se stiže na dijagonalu u točki (k, k) mora biti G. Uklonimo ta dva poteza. Tada čestica kreće iz točke $(1, 0)$ i završava u točki $(k-1, k-1)$ i pritom nikad ne dodirne dijagonalu. No, taj je dio puta ekvivalentan šetnji iz točke $(0, 0)$ do točke $(k-1, k-1)$ pri čemu čestica smije dodirnuti dijagonalu! Zato se taj dio puta može obaviti na C_{k-1} načina.



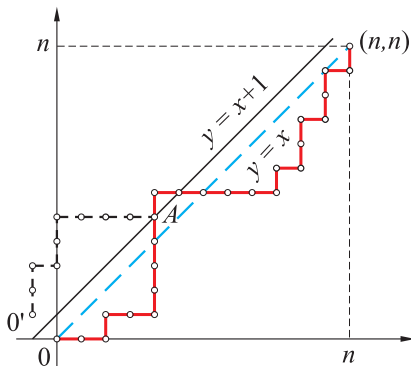
Ostatak puta, od točke (k, k) do (n, n) može se obaviti na C_{n-k} načina. Dakle, za traženi broj C_n vrijedi

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k},$$

a to je upravo rekurzivna relacija koju zadovoljavaju Catalanovi brojevi.

2. rješenje. Prebrojavanje ćemo sad načiniti na drugi način, koristeći se pritom svojstvom simetrije promatranih šetnji. Svih putova iz $(0, 0)$ u (n, n)

ima koliko i nizova sastavljenih od po n simbola D i G. Taj je broj jednak $\binom{2n}{n}$. Sad ćemo od svih mogućih šetnji izdvojiti one koje ne zadovoljavaju uvjete, one koje prelaze dijagonalu $y = x$.



Pritom ćemo se poslužiti trikom. Ako šetnja prolazi dijagonalu, tada ona mora dodirnuti pravac $y = x + 1$. Označimo sa A točku u kojoj se to dogodi prvi put. Sad zrcalimo prvi dio puta, od ishodišta

O do točke A s obzirom na pravac $y = x + 1$. Točka $O = (0, 0)$ prelazi u $O'(-1, 1)$.

Vidimo da svakoj originalnoj šetnji koja prelazi dijagonalu odgovara točno jedna šetnja koja kreće iz točke $(-1, 1)$. Vrijedi i obrat! Ako šetnja kreće iz $(-1, 1)$, onda se ona nalazi u početku iznad pravca $y = x + 1$. Da bismo odatle stigli u točku (n, n) , u jednom trenutku moramo dodirnuti pravac $y = x + 1$. Zrcaljenjem tog dijela puta, dobivamo originalnu šetnju koja kreće iz $(0, 0)$ i prelazi preko dijagonale.

Zato je lako prebrojiti broj takvih, nevaljanih šetnji. Ima ih točno $\binom{2n}{n-1}$, jer je šetnja dugačka $2n$ koraka, od kojih je točno $(n-1)$ usmjereno prema gore. To znači da je broj dobrih šetnji jednak:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

a to je upravo Catalanov broj C_n .

Večer matematike 2016.

Poštovane kolegice i kolege!

Četvrta Večer matematike u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva održat će se u **četvrtak, 1. prosinca 2016.** s početkom u 18 sati. Cilj ove manifestacije je popularizacija matematike te poticaj učenika na nastavak matematičkog obrazovanja.

Prošlogodišnja Večer matematike pokazala se iznimno uspješna s preko 78 000 sudionika iz 61 dječjeg vrtića, 351 osnovne škole te 54 srednje škole iz cijele Republike Hrvatske, a nadamo se da će se ove godine taj broj dodatno povećati.

Prijave za Večer matematike već su počele na <mailto:vecermatematike@math.hr>. Prijavni obrazac i informacije o provedbi možete pronaći na <http://www.matematika.hr/vecermatematike/2016>. Materijali za preuzimanje bit će dostupni od 3. studenoga 2016. kada ćemo svim prijavljenim sudionicima e-poštom poslati link za preuzimanje.

Novosti o Večeri matematike možete pratiti i na našoj facebook stranici

<https://www.facebook.com/vecermatematike/?fref=ts>.

Veselimo se suradnji!

Tanja Soucie, prof., voditeljica Nastavne sekcije Hrvatskog matematičkog društva
Ivana Katalenac, prof., potpredsjednica Hrvatskog matematičkog društva