O pseudojednakokračnim trokutima

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
Alija Muminagić, Nykøbing, Danska

Kada su u pitanju simetrale unutarnjih kutova trokuta, poznato je da vrijedi Steinerov[1] teorem koji glasi:

Ako su duljine simetrala dvaju unutarnjih kutova trokuta jednake, trokut je jednakokračan.

Recimo da se u [1] nalazi sedam raznih dokaza ovog teorema.

Sada se sasvim opravdano postavlja sljedeće pitanje:

Je li trokut jednakokračan ako su duljine simetrala dvaju vanjskih kutova jednake?

Pod duljinom simetrale vanjskog kuta trokuta podrazumijeva se duljina odsječka što ga simetrale vanjskog kuta trokuta čine s produžetkom nasuprotne stranice njemu odgovarajućeg unutarnjeg kuta tog trokuta.

Dokazat ćemo da **ne vrijedi** potvrdan odgovor, tj. vrijedi $s_\alpha = s_\beta$, ali $|AC| \neq |BC|$.

Dokaz. Neka je u trokutu ABC koji nije jednakokračan (slika) $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $\alpha = 132°$, $\beta = 12°$, $\gamma = 36°$, $s_\alpha = |AD|$, $s_\beta = |BE|$ i pritom vrijedi $s_\alpha = s_\beta$, gdje su s_α i s_β duljine simetrala vanjskih kutova α i β. Dokazat ćemo da je $s_\alpha = s_\beta$. (Uočimo da ovdje vrijedi $\alpha > \gamma > \beta \implies a > c > b$.)

Sa slike vidimo da je:

$$\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = \frac{1}{2}(180° - 132°) = 24°$$

kao i

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB = 24° + 132° = 156°.$$

U trokutu ABD je

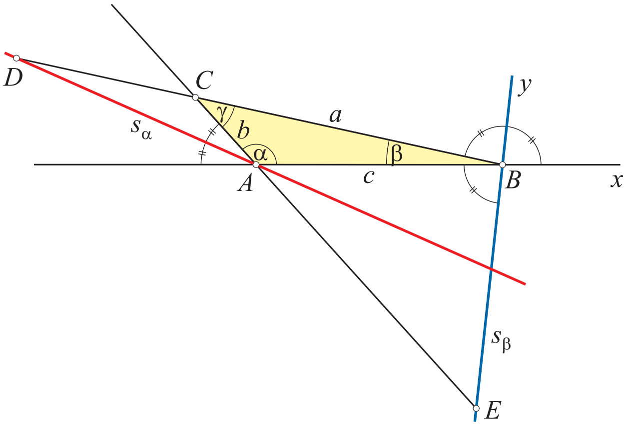
$$\begin{aligned}\sphericalangle ADB &= 180° - \sphericalangle DAB - \sphericalangle ABD\\ &= 180° - 156° - 12° = 12°,\end{aligned}$$

što znači da je zbog $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = 12°$ trokut ABD jednakokračan te je:

$$|AD| = |AB| \tag{1}$$

U trokutu ABE je

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABE\,(= \sphericalangle xBy) &= \frac{1}{2}(180° - \beta)\\ &= \frac{1}{2}(180° - 12°) = 84°\end{aligned}$$



Prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, asefket@pmf.unsa.ba
Alija Muminagić, Nykøbing, Danska

[1] Jakob Steiner (1796. – 1863.), švicarski matematičar

kao i

$$\sphericalangle EAB = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$$

te

$$\begin{aligned}\sphericalangle AEB &= 180^\circ - \sphericalangle ABE - \sphericalangle EAB\\ &= 180^\circ - 84^\circ - 48^\circ = 48^\circ\end{aligned}$$

što znači da je zbog $\sphericalangle EAB = \sphericalangle AEB = 48^\circ$ i trokut ABE jednakokračan te je:

$$|AB| = |BE|. \tag{2}$$

Sada iz (1) i (2) slijedi:

$$s_\alpha = s_\beta,$$

a trokut ABC nije jednakokračan. Ovim je naša tvrdnja dokazana.

Definicija. Trokut koji ima jednake duljine simetrala dvaju vanjskih kutova, a nije jednakokračan naziva se pseudojednakokračan.

U matematičkoj literaturi nalazimo da se ovakvi trokuti nazivaju Emmerichovi[2] trokuti.

Dokazat ćemo sada jedan teorem koji se odnosi na stranice pseudojednakokračnog trokuta.

Teorem. Za stranice pseudojednakokračnog trokuta vrijedi jednakost:

$$c^3 - c^2(a+b) + 3abc - ab(a+b) = 0. \tag{3}$$

Dokaz. S prethodne slike uočavamo da je:

$$P_{\triangle DAB} - P_{\triangle DAC} = P_{\triangle ABC},$$

tj.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}s_\alpha \cdot c\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}s_\alpha \cdot b\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\\ &\qquad = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad /\cdot 2\\ \iff\ & s_\alpha \cdot c\cos\frac{\alpha}{2} - s_\alpha \cdot b\cos\frac{\alpha}{2}\\ &\qquad = 2bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad /:\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0\\ \iff\ & s_\alpha \cdot (c-b) = 2bc\sin\frac{\alpha}{2}\\ \iff\ & s_\alpha = \frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}}{c-b}.\end{aligned}$$

Zbog poznatih obrazaca $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ i $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ sada dobivamo:

$$\begin{aligned}s_\alpha &= \frac{2bc\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}}{c-b}\\ &= \frac{\sqrt{4b^2c^2\cdot\dfrac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}}{c-b},\end{aligned}$$

tj.

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc(a+b-c)(a-b+c)}}{c-b} \tag{4}$$

te analogno

$$s_\beta = \frac{\sqrt{ac(a+b-c)(b-a+c)}}{a-c} \tag{5}$$

jer imamo (slika):

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BCE} - P_{\triangle AEB},$$

tj.

$$\begin{aligned}&\frac{a\cdot c}{2}\sin\beta = \frac{a\cdot s_\beta}{2}\sin\frac{180^\circ+\beta}{2}\\ &\qquad - \frac{c\cdot s_\beta}{2}\sin\frac{180^\circ-\beta}{2}\\ \iff\ & \frac{ac}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{a\cdot s_\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\ &\qquad - \frac{c\cdot s_\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \quad /:\frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2} \neq 0\\ \iff\ & 2ac\sin\frac{\beta}{2} = as_\beta - cs_\beta,\end{aligned}$$

a odavde:

$$s_\beta = \frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{a-c} = \frac{2ac\sin\frac{\beta}{2}}{a-c} = \frac{2ac}{a-c}\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$$

[2] A. Emmerich, njemački matematičar, živio i radio u drugoj polovici 19. i prvoj polovici 20. stoljeća

$$= \frac{2ac}{a-c}\sqrt{\frac{1-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{2}}$$
$$= \frac{2ac}{a-c}\sqrt{\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{4ac}}$$
$$= \frac{1}{a-c}\sqrt{ac\,[b^2-(a-c)^2]}$$
$$= \frac{\sqrt{ac(a+b-c)(b+c-a)}}{a-c}.$$

Kako je $s_\alpha = s_\beta$, dobivamo zbog (4) i (5):

$$\frac{\sqrt{bc(a+b-c)(a-b+c)}}{c-b} = \frac{\sqrt{ac(a+b-c)(b-a+c)}}{a-c}$$
$$\iff (a-c)^2[bc(a+b-c)(a-b+c)] = (c-b)^2[ac(a+b-c)(b-a+c)]$$
$$\iff b(a-c)^2(a-b+c) = a(c-b)^2(b-a+c)$$
$$\iff (a^2-2ac+c^2)(ab-b^2+bc) = (c^2-2bc+b^2)(ab-a^2+ac)$$
$$\iff abc^2-2a^2bc+a^3b-b^2c^2+2ab^2c-a^2b^2+bc^3-2abc^2+a^2bc = abc^2-2ab^2c+ab^3-a^2c^2+2a^2bc-a^2b^2+ac^3-2abc^2+ab^2c$$
$$\iff ac^3-bc^3-a^2c^2+b^2c^2+3a^2bc-3ab^2c+ab^3-a^3b=0$$
$$\iff c^3(a-b)-c^2(a^2-b^2)+3abc(a-b)-ab(a^2-b^2)=0$$
$$\iff (a-b)[c^3-c^2(a+b)+3abc-ab(a+b)]=0$$
$$\iff c^3-c^2(a+b)+3abc-ab(a+b)=0$$

(jer je $a \neq b$, tj. $a-b \neq 0$), a ovo je (3). ∎

Dokažimo još da u pseudojednakokračnom trokutu vrijedi jednakost

$$4Rr_c - c^2 - ab = 0 \qquad (6)$$

Dokaz. Stavimo li u (3) da je $abc = 4RP$, $r_c = \frac{P}{s-c}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, gdje je R polumjer opisane kružnice trokuta ABC, P površina tog trokuta i r_c polumjer pripisane kružnice trokuta ABC koja odgovara stranici c; dobivamo:

$$c^3-c^2(a+b)+3abc-ab(a+b)=0$$
$$\iff c^3-ac^2-bc^2+3abc-a^2b-ab^2=0$$
$$\iff 2abc-ac^2-a^2b-bc^2-ab^2+c^3+abc=0$$
$$\iff 2abc-(ac^2+a^2b+bc^2+ab^2-c^3-abc)=0$$
$$\iff 2abc-[c^2(a+b-c)+ab(a+b-c)]=0$$
$$\iff 2abc-(a+b-c)(c^2+ab)=0$$
$$\iff abc-\frac{(a+b-c)}{2}(c^2+ab)=0$$
$$\iff abc-(s-c)(c^2+ab)=0$$
$$\iff abc-c^2(s-c)-ab(s-c)=0 \quad /:(s-c\neq 0)$$
$$\iff \frac{abc}{s-c}-c^2-ab=0$$
$$\iff \frac{4RP}{\frac{P}{r_c}}-c^2-ab=0$$
$$\iff 4Rr_c-c^2-ab=0,$$

a ovo je (6). ∎

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

2/ H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America (New Mathematical Library), Washington, 1967.

3/ I. F. Sharygin, *Problems in Plane Geometry*, Mir Publishers, Moscow, 1988.