Metode ispitivanja iracionalnosti brojeva

Sanja Varošanec, Zagreb

U 8. razredu u nastavnoj cjelini *Realni brojevi* javlja se pitanje: "Postoje li, osim racionalnih brojeva, još neki drugi brojevi?" Pozitivan odgovor obično ilustriramo s pomoću broja $\sqrt{2}$. Naime, duljina dijagonale kvadrata stranice 1, prema Pitagorinu poučku jest broj koji kvadriran daje 2 i koji označavamo sa $\sqrt{2}$. Kad dokažemo da taj broj nije racionalan, pozitivan odgovor gornjeg pitanja je potpun. U posljednje vrijeme taj se dokaz u osnovnoj školi izostavlja i ostavlja za srednju školu iako je to jedna od prvih tvrdnji koje se prirodno dokazuju indirektnim dokazom. Baš zbog metodičke uloge koju ta tvrdnja ima, napravit ćemo dva detaljna dokaza. Raznolikosti radi, broj čiju racionalnost ispitujemo bit će broj $\sqrt{5}$.

Primjer 1. Dokažimo da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.

1. dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $\sqrt{5}$ racionalan, dakle, prikaziv u obliku $\sqrt{5} = \dfrac{m}{n}$ gdje su m i n prirodni brojevi. Tada je

$$5n^2 = m^2.$$

Prema **osnovnom teoremu aritmetike** svaki se prirodni broj veći od 1 može prikazati kao produkt prostih brojeva na jedinstven način do na poredak faktora. Tako se i m i n mogu prikazati kao produkt prostih brojeva. Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ svi različiti prosti brojevi koji se kao faktori pojavljuju u brojevima m ili n. Tada je

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbf{N}_0$. Kakav rastav na faktore ima broj m^2? Vrijedi

$$m^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k},$$

tj. u kvadratu se svaki prosti broj pojavljuje paran broj puta. Vratimo se jednakosti $5n^2 = m^2$ i napišimo je s pomoću rastava na faktore:

$$5p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\beta_k} = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}.$$

Faktor 5 se na desnoj strani jednakosti pojavljuje paran broj puta, a na lijevoj se strani pojavljuje neparan broj puta. Time smo došli do protuslovlja (kontradikcije).

Prisjetimo se da se dokaz teorema $P \Rightarrow Q$ svođenjem na kontradikciju zasniva na ekvivalentnosti dviju logičkih formula: $P \Rightarrow Q$ i $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ ili na ekvivalenciji formula $P \Rightarrow Q$ i $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow$ Laž, pri čemu je P pretpostavka teorema, Q njegova tvrdnja, a A neki logički sud. U ovom primjeru $A =$ *faktor* 5 *se javlja paran broj puta*.

U ovom dokazu ključnu je ulogu odigrao *osnovni teorem aritmetike*, koji se obično u nastavi ne izriče eksplicitno, ali se njime koristimo već u 5. razredu. Pokažimo još jedan način dokazivanja iste tvrdnje.

prof. dr. sc. Sanja Varošanec, Matematički odsijek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, varosans@math.hr

To je opet dokaz svođenjem na kontradikciju, ali se u dokazu pojavljuje pomoćna tvrdnja koja se dokazuje obratom po kontrapoziciji. Dakle, u jednom dokazu imamo pojavu dviju najčešćih vrsta indirektnog dokaza.

2. dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $\sqrt{5}$ racionalan, dakle, prikaziv u obliku $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ gdje su m i n relativno prosti prirodni brojevi, tj. $M(m,n) = 1$ (ta će posljednja rečenica imati ulogu suda A u dokazu). Tada je

$$5n^2 = m^2.$$

Dakle, broj 5 dijeli lijevu stranu jednakosti pa dijeli i desnu stranu, tj. $5 \mid m^2$. Sad iskoristimo ovu pomoćnu tvrdnju:

Ako 5 dijeli kvadrat prirodnog broja, tada dijeli i taj broj.

Dakle, 5 dijeli i broj m, tj. $m = 5k$ gdje je $k \in \mathbf{N}$. Vratimo se u jednakost $5n^2 = m^2$:

$$\begin{aligned} 5n^2 &= m^2 \\ 5n^2 &= 25k^2 \\ n^2 &= 5k^2. \end{aligned}$$

Dakle, 5 dijeli i n^2, pa prema pomoćnoj tvrdnji dijeli i n. Time smo dobili da je 5 djelitelj i broja m i broja n, tj. m i n nisu relativno prosti čime smo dobili kontradikciju. Dakle, pretpostavka da je broj $\sqrt{5}$ racionalan dovodi do kontradikcije, pa zaključujemo da mora vrijediti suprotno, tj. da je broj $\sqrt{5}$ iracionalan čime je dokaz gotov.

Sad dokažimo još i pomoćnu tvrdnju:

$$5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m.$$

Ovdje ćemo provesti drugi tip indirektnog dokaza tzv. dokaz obrata po kontrapoziciji. Taj se dokaz svodi na ekvivalentnost tvrdnji $P \Rightarrow Q$ i $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da 5 ne dijeli m. Tada je m oblika $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ ili $5k+4$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Ako je $m = 5k+1$, tada je

$$m^2 = (5k+1)^2 = 5(5k^2 + 2k) + 1$$

te 5 ne dijeli m^2. Analogno se pokaže za ostale slučajeve. Time smo dokazali istinitost tvrdnje da ako 5 ne dijeli m, tada ne dijeli niti m^2, što je ekvivalentno izreci pomoćne tvrdnje.

* * *

Kako osmisliti još zadataka ovog tipa?

Ovdje smo promatrali broj $\sqrt{5}$. U literaturi je najčešće dan dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$. I 2 i 5 su prosti brojevi, pa bi općenitija tvrdnja glasila ovako:

Dokažite da je $\sqrt{p}$ iracionalan broj pri čemu je p prost broj.

Zašto se ograničiti samo na kvadratne korijene? I taj se uvjet može oslabiti pa imamo i ovakav zadatak:

Dokažite da je $\sqrt[n]{p}$ iracionalan broj pri čemu je p prost i n prirodan broj veći od 1.

Dokaze ovih dviju tvrdnji provodimo koristeći se direktnom analogijom s dokazom primjera 1. No vrijedi još općenitija tvrdnja koja se u sljedećem obliku nalazi u [1, str. 55]:

Ako broj $\sqrt[n]{a}$, $a, n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, nije prirodan broj, on je iracionalan.

Pri dokazu ove tvrdnje ne smije se slijepo prepisivati dokaz koji smo proveli za $\sqrt{5}$, jer se kod primjene pomoćne tvrdnje krije zamka. Riješimo jedan zadatak tog tipa.

Primjer 2. Dokažimo da je $\sqrt{18}$ iracionalan broj.

Po obliku ovaj primjer jako sliči prvom primjeru pa bi netko bez mnogo razmišljanja pomislio da se dokaz prvog primjera direktno preslikava na drugi. Pa krenimo u dokaz na isti način. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{18}$ racionalan broj oblika

$$\sqrt{18} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbf{N}, M(m,n) = 1.$$

Tada je $18n^2 = m^2$. Broj 18 dijeli lijevu stranu pa dijeli i desnu stranu, tj. $18 \mid m^2$. Sad analogno kao u prethodnom zadatku zaključimo da 18 dijeli m i dokaz provedemo dalje. Upsss...

Ali takav zaključak ne vrijedi. Evo jednog primjera koji opovrgava tvrdnju da ako $18 \mid m^2$, tada i $18 \mid m$. Uzmimo da je $m = 6$. Tada $18 \mid 6^2$, ali 18 ne dijeli 6. Dakle, od direktno generalizirane pomoćne tvrdnje nema puno pomoći, jer nije istinita. Ali i ne trebamo promatrati cijeli broj 18 kao djelitelj, nego samo onaj njegov prosti faktor koji se ne pojavljuje paran broj puta u 18, a to je faktor 2. Iskoristimo u daljnjem dokazu tvrdnju da ako $2 \mid m^2$, tada $2 \mid m$. Ova je tvrdnja istinita i dokazuje se na isti način kao u prvom primjeru. Tada dokaz nastavljamo ovim nizom implikacija:

$$\begin{aligned} 18 \mid m^2 &\Rightarrow 2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow 4 \mid m^2 \Rightarrow 4 \mid 18n^2 \\ &\Rightarrow 2 \mid 9n^2 \Rightarrow 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n. \end{aligned}$$

Dakle, broj 2 je zajednički djelitelj brojeva m i n čime smo došli u kontradikciju.

Primjer 3. Dokažimo da je broj $\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$ iracionalan.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $x = \sqrt{5}+\sqrt[3]{7}$ racionalan. Izvedimo ove transformacije

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7} &= x - \sqrt{5} \\ 7 &= (x-\sqrt{5})^3 \\ 7 &= x^3 - 3x^2\sqrt{5} + 3x(\sqrt{5})^2 - 5\sqrt{5} \\ \sqrt{5} &= \frac{x^3+15x-7}{3x^2+5}. \end{aligned}$$

Ako je x racionalan, tada su $x^3, x^2, 15x$ racionalni pa je na desnoj strani racionalni broj. A na lijevoj je strani iracionalni broj $\sqrt{5}$ čime smo došli u kontradikciju. Dakle, početna pretpostavka nije istinita, te zaključujemo da je x iracionalan. Istaknimo da smo se u zaključivanju da se na desnoj strani radi o racionalnom broju koristili svojstvima **polja $\mathbf{Q}$**.

Iz postupka dokaza jasno je kako osmisliti nove zadatke ovog tipa. Ako se zadržimo na upotrebi kvadratnog i trećeg korijena, možemo formulirati ovakav zadatak:

Ispitajmo iracionalnost broja $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$, $a, b \in \mathbf{N}$.

Naravno, možemo kombinirati i s drugim korijenima. A možemo promatrati i sumu nekoliko korijena kao što je dano u sljedećem primjeru.

Primjer 4. Dokažimo da je broj $\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$ iracionalan.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}+\sqrt{11}$ racionalan. Tada je

$$\begin{aligned} &x - \sqrt{11} = \sqrt{5}+\sqrt{7} \\ &(x-\sqrt{11})^2 = (\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 \\ &x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 5 + 2\sqrt{35} + 7 \\ &x^2 - 1 = 2\sqrt{35} + 2\sqrt{11}x \\ &(x^2-1)^2 = (2\sqrt{35}+2\sqrt{11}x)^2 \\ &x^4 - 46x^2 - 139 = 8\sqrt{385}x \end{aligned}$$

te je

$$\sqrt{385} = \frac{x^4-46x^2-139}{8x}.$$

Na lijevoj strani jednakosti nalazi se iracionalni broj (prema tvrdnji iskazanoj na kraju prvog primjera), a na desnoj strani se nalazi racionalni broj, što je nemoguće. Dakle, x mora biti iracionalan.

Primjer 5. Dokažimo da je broj

$$\sqrt{32+10\sqrt{7}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}}$$

racionalan.

Prvo ćemo ovaj primjer riješiti metodom koja je na neki način univerzalna metoda za ovakav tip zadataka, a onda ćemo ga riješiti na drugi način iskorištavajući specifičan odabir brojeva.

1. dokaz. Označimo taj broj sa x i kvadrirajmo ga.

$$\begin{aligned} x^2 &= (32+10\sqrt{7}) \\ &\quad + 2\sqrt{(32+10\sqrt{7})(32-10\sqrt{7})} \\ &\quad + (32-10\sqrt{7}) \\ x^2 &= 64 + 2\sqrt{32^2 - 100\cdot 7} \\ x^2 &= 100. \end{aligned}$$

Budući da je broj x očito pozitivan, slijedi da je $x = 10$. Dakle, radi se o racionalnom broju.

Zamijetimo da se ovdje radi o direktnom dokazu. Inače, što se tiče matematičkog predznanja potrebnog za rješavanje ovog tipa zadatka, dovoljno je poznavanje formula za kvadrat binoma i razlike kvadrata, tj. formula koje se prvi put obrađuju u 8. razredu. Stoga se jedan ovakav zadatak pojavio i na općinskom natjecanju davne 1988. godine.

2. dokaz. Uočimo da je

$$32+10\sqrt{7}=25+2\cdot 5\cdot\sqrt{7}+7=(5+\sqrt{7})^2$$

i $32-10\sqrt{7}=(5-\sqrt{7})^2$. Tada je

$$\begin{aligned}&\sqrt{32+10\sqrt{7}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}}\\&=\sqrt{(5+\sqrt{7})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{7})^2}\\&=|5+\sqrt{7}|+|5-\sqrt{7}|=10.\end{aligned}$$

Dakle, promatrani broj je racionalan.

Ako želimo formirati nove zadatke ovog tipa, bitno je uočiti da se pod znakovima korijena javljaju zbroj i razlika istih brojeva. Zapravo, radi se o broju oblika

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}.$$

Ta će činjenica omogućiti da se pri kvadriranju binoma u članu *dvostruki prvi puta drugi* javi korijen razlike kvadrata. Dakle, treba samo odabrati brojeve a i b tako da je broj a^2-b potpuni kvadrat. Evo nekoliko primjera:

a	b	a^2-b	broj
6	20	16	$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
6	20	16	$\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
7	48	1	$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
10	51	49	$\sqrt{10+\sqrt{51}}-\sqrt{10-\sqrt{51}}$

Ako želimo da zadatak bude rješiv koristeći se i drugim dokazom, onda pri formiranju promatranog treba krenuti "unatrag". Na primjer:

$$1+\sqrt{2}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$2+\sqrt{3}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}.$$

Broj čiju iracionalnost ispitujemo je $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Iracionalan je jer je jednak $3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Želimo li sastaviti zadatak sličan primjeru 5, ali s trećim korijenom, situacija je malo kompliciranija. Promotrimo prvo kako se rješava jedan konkretni primjer.

Primjer 6. Dokažimo da je broj

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

racionalan.

Označimo taj broj sa x i kubirajmo ga. Dobivamo

$$\begin{aligned}x^3&=(2+\sqrt{5})+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})}\\&\quad+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2}+(2-\sqrt{5})\\x^3&=4-3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})\\x^3&=4-3x\\x^3&+3x-4=0.\end{aligned}$$

Dakle, broj x je rješenje jednadžbe $x^3+3x-4=0$. Radi se o kubnoj jednadžbi, a u srednjoj školi se ne spominju formule za rješenja takvih jedndžbi. No, ova je jednadžba posebna, jer je gotovo očito da je jedno rješenje broj 1. Druga dva rješenja nađemo tako da polinom x^3+3x-4 podijelimo s polinomom $x-1$ i nađemo nul-točke dobivenog kvadratnog polinoma x^2+x+4. Budući da je x pozitivan, slijedi da x nije rješenje jednadžbe $x^2+x+4=0$. Dakle, jedino što preostaje jest da je x jednak trećem rješenju te kubne jednadžbe, tj. $x=1$. Stoga je x racionalan.

Ako zadani broj zapišemo u obliku $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$, tada a i b zadovoljavaju $a^2-b=-1$ i kubna jednadžba ima oblik $x^3+3x-2a=0$. Ona mora biti takva da joj se jedno rješenje lako pogodi. Evo par primjera:

x	a	b	broj
1	2	5	$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
2	7	50	$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$
3	18	325	$\sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}+\sqrt[3]{18-5\sqrt{13}}$

Primjer 7. Dokažimo da je broj $\log_{22} 44$ iracionalan.

Opet rješavamo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da je $\log_{22} 44$ racionalan, tj.

$$\log_{22} 44 = \frac{a}{b}, \quad a > b, \quad a, b \in \mathbf{N}.$$

Tada je

$$44 = 22^{\frac{a}{b}},$$

pa potenciranjem sa b dobivamo

$$44^b = 22^a, \; 2^{2b} \cdot 11^b = 2^a \cdot 11^a, \; 2^{2b} = 2^a \cdot 11^{a-b}.$$

Ako je $2b \geq a$, tada imamo $2^{2b-a} = 11^{a-b}$ i desna strana kao faktor ima broj 11 dok ga lijeva strana nema, što je nemoguće. Ako je $2b < a$, tada je $1 = 2^{a-2b} \cdot 11^{a-b}$ pa na desnoj strani imamo i faktor 11 i faktor 2, dok ih na lijevoj strani nema, što je nemoguće. Time smo u oba slučaja došli u kontradikciju.

Ovdje je dosta očito kako napraviti nove zadatke.

I konačno spomenimo i probleme određivanja iracionalnosti broja koji se svode na promatranje decimalnog zapisa danog broja. Osnovno svojstvo iracionalnih brojeva jest da im je decimalni zapis beskonačan neperiodičan. Također poznajemo i oblik decimalnog zapisa racionalnog broja: zapis može biti konačan ili periodičan (čisto ili mješovito). Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 8. Ispitajmo racionalnost broja

$$0.232332333233332\ldots$$

Uočimo kako se formira ovaj broj: nakon prve znamenke 2 pojavi se jedna znamenka 3, nakon druge znamenke 2 pojave se dvije znamenke 3, nakon k-te znamenke 2 pojavi se k znamenaka 3 i tako dalje. Pretpostavimo da je promatrani broj racionalan. Njegov zapis očito nije konačan. Dakle, periodičan je. Neka je duljina perioda n. Promatramo onaj dio decimalnog zapisa koji je dovoljno daleko da je pretperiod već ispisan. Dakle, tu se sad nižu periodi (i svi su duljine n). Ali, nakon dovoljno dalekog decimalnog mjesta pojavit će se 2 i iza nje više od n trojki. To znači da se period sastoji od samih trojki i takav će se period stalno ponavljati. Ali to je nemoguće jer će se nakon konačnog broja trojki opet pojaviti dvojka, tj. narušit će se periodičnost. Time smo došli u kontradikciju.

Izvan školskog gradiva

Opišimo još jednu metodu koja se može rabiti pri ispitivanju iracionalnosti brojeva. Zasniva se na sljedećem teoremu koji nije dio redovnog školskog gradiva, ali je lako dokaziv, vidjeti [2, str. 88].

Teorem. *Ako je racionalni broj $\frac{p}{q}$ rješenje jednadžbe*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana a_0, a q je djelitelj vodećeg koeficijenta a_n.

Primjer 9. Ispitajmo racionalnost broja $\sqrt{3 - \sqrt[3]{2}}$.

Pronađimo jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima čije je rješenje broj $x = \sqrt{3 - \sqrt[3]{2}}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} &x^2 = 3 - \sqrt[3]{2} \\ &\sqrt[3]{2} = 3 - x^2 \\ &2 = (3 - x^2)^3 \\ &x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 25 = 0. \end{aligned}$$

Prema prethodno izrečenom teoremu, ako je $\frac{p}{q}$ rješenje te jednadžbe, tada p dijeli 25, a q dijeli 1. Dakle, mogući kandidati za brojeve $\frac{p}{q}$ su brojevi

$$\pm 1, \pm 5, \pm 25.$$

Direktnim uvrštavanjem tih šest brojeva u jednadžbu dobivamo da nijedan od njih nije rješenje jednadžbe, tj. nijedan od tih brojeva nije jednak $\sqrt{3 - \sqrt[3]{2}}$, a budući da su to jedina racionalna rješenja slijedi da je $\sqrt{3 - \sqrt[3]{2}}$ iracionalan broj.

Jasno je da smo ovaj zadatak mogli riješiti i metodom opisanom u primjeru 3, ali za potpuno rješenje tom metodom bilo bi potrebno još i dokazati iracionalnost broja $\sqrt[3]{2}$ koristeći se metodom iz primjera 1.

LITERATURA

1/ B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

2/ B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.