Al-Khwarizmijeva metoda
rješavanja kvadratnih jednadžbi

Ljiljana Primorac Gajčić, Osijek

U članku je predstavljena geometrijska ilustracija postupka rješavanja određenih kvadratnih jednadžbi kojom se koristio arapski matematičar Al-Khwarizmi (oko 790. – oko 850.).

Arapski matematičar Abu Jafar Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (oko 790. – oko 850.) autor je prvog djela o algebri, "Hisab al-jabr w'al-muqabala", koje je zamišljeno kao praktični priručnik za rješavanje problema u trgovini, podjeli nasljedstva, te izradi proračuna tadašnje islamske zajednice. Priručnik se sastojao od aritmetičkih pravila za linearne i kvadratne jednadžbe, pravila za podjelu nasljedstva, te elementarne geometrije.

Riječi *al-jabr* (iz koje se razvila riječ algebra) i *al-muqabala* su nazivi radnji kojima su se rješavale jednadžbe. Operacija *al-jabr* odnosila se na uklanjanje negativnih izraza iz jednadžbe, a operacija *al-muqabala* predstavljala je uklanjanje jednakih veličina koje su se javljale s obiju strana jednadžbe. Uzmemo li na primjer, jednadžbu $4x+5=7-2x$, primjenom operacije *al-jabr* prevodimo je u oblik $6x+5=7$, a zatim primjenom operacije *al-muqabala* dobivamo oblik $6x=2$.

Al-Khwarizmi je poznavao linearne i kvadratne jednadžbe, a budući da arapski matematičari tog vremena nisu poznavali negativne brojeve, umjesto danas poznatog općeg oblika kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, Al-Khwarizmi je razlikovao 6 tipova:

1. $ax^2=bx$
2. $ax^2=c$
3. $bx=c$
4. $ax^2+bx=c$
5. $ax^2+c=bx$
6. $bx+c=ax^2$.

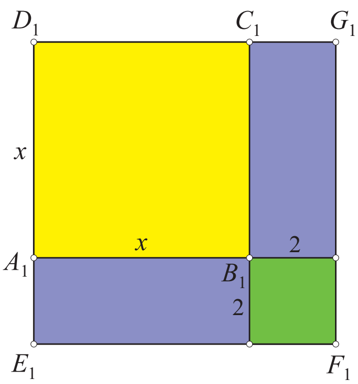
Sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu se svesti na jedan od navedenih tipova, a svođenje je uključivalo operacije *al-jabr* i *al-muqabala*.

Za jednadžbe prva tri tipa rješenja su očita, uz napomenu da nula nije smatrana rješenjem jed-

Ljiljana Primorac Gajčić, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, `lprimora@mathos.hr`

nadžbe prvog tipa, dok je za preostale tipove jednadžbi Al-Khwarizmi detaljno objasnio postupak rješavanja, te naveo i geometrijsku ilustraciju samog postupka. Geometrijska ilustracija zahtijevala je izjednačavanje koeficijenta uz x^2 sa 1, a duljina stranice kvadrata koja je predstavljala x bila je proizvoljna.

Promotrimo sad jednadžbu $x^2 + 4x = 45$. To je očito jednadžba četvrtog tipa i na njoj ćemo ilustrirati Al-Khwarizmijevu metodu rješavanja. Kvadratu $A_1B_1C_1D_1$ površine x^2 docrtamo dva pravokutnika sa stranicama duljine 2 tj. $\frac{b}{2}$ i x. Zbroj površina kvadrata i pravokutnika je 45, tj. $x^2 + 4x = 45$. Docrtamo li dobivenom liku kvadrat površine 4, kako je prikazano na slici 1, dobit ćemo novi kvadrat $E_1F_1G_1D_1$ sa stranicama duljine $x+2$ i površinom 49. Dakle, x je 5.



Slika 1.

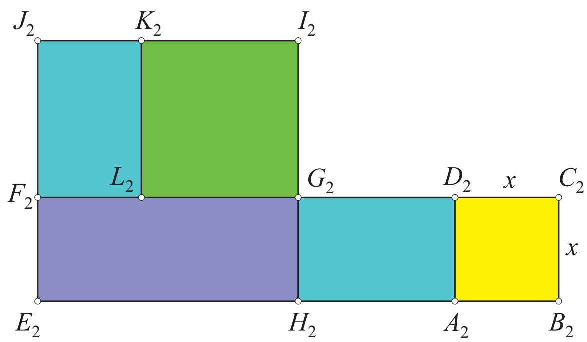
U slučaju jednadžbe petog tipa, Al-Khwarizmi postupak rješavanja svodi na formulu

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

te je navedeno da u slučaju kad je $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$ jednadžba nema rješenja, a u slučaju kad je $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, rješenje jednadžbe je upravo $\frac{b}{2}$. Također Al-Khwarizmi daje geometrijski postupak rješavanja uz pretpostavku da je $\frac{b}{2} > x$, dok je za slučajeve $x \geq \frac{b}{2}$ postupak vrlo sličan.

Riješimo jednadžbu $x^2 + 16 = 10x$ Al-Khwarizmijevom metodom, slika 2.

Kvadratu $A_2B_2C_2D_2$ površine x^2 docrtamo pravokutnik $D_2A_2E_2F_2$ površine 16. Očito je $|F_2C_2| = 10$. Neka su točke G_2 i H_2 polovišta dužina $\overline{F_2C_2}$ i $\overline{E_2B_2}$, redom. Produljimo dužinu $\overline{H_2G_2}$ preko točke G_2 do točke I_2 tako da vrijedi $|G_2I_2| = |G_2D_2|$, te odredimo točku J_2 tako da je četverokut $G_2I_2J_2F_2$ pravokutnik. Odredimo točku K_2 na dužini $\overline{I_2J_2}$ tako da vrijedi $|K_2I_2| = |I_2G_2|$, te odredimo točku L_2 tako da je četverokut $G_2I_2K_2L_2$ kvadrat. Uočimo da su pravokutnici $H_2A_2D_2G_2$ i $F_2L_2K_2J_2$ međusobno sukladni. Površina kvadrata $E_2H_2I_2J_2$ je $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, tj. 25, te kada njemu uklonimo kvadrat $G_2I_2K_2L_2$, dobivamo lik čija je površina 16. Slijedi da je površina kvadrata $G_2I_2K_2L_2$ jednaka $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$, tj. $25 - 16 = 9$, pa su stranice duljine $|G_2D_2| = 3$, te slijedi $x = |D_2C_2| = |G_2C_2| - |G_2D_2| = 5 - 3 = 2$. Na ovaj način dobiveno rješenje odgovara rješenju $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

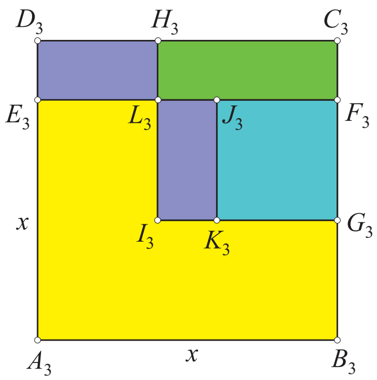


Slika 2.

Al-Khwarizmi je uočio da i $|C_2L_2|$ također predstavlja rješenje jednadžbe (odgovara rješenju $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$) ali to nije istaknuo pri rješavanju. Također se nije bavio geometrijskim metodama za rješavanje specijalnog slučaja $\frac{b}{2} = c$ iako ga je poznavao.

Slično kao kod jednadžbe petog tipa, geometrijskom metodom dobiveno rješenje jednadžbe šestog tipa predstavlja rješenje dobiveno formulom $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$. Geometrijska ilustracija postupka rješavanja jednadžbe $8x + 20 = x^2$ prikazana je na slici 3.

Neka je $A_3B_3C_3D_3$ kvadrat površine x^2. Na dužini $\overline{A_3D_3}$ odredimo točku E_3, a na dužini $\overline{B_3C_3}$ točku F_3, tako da vrijedi $|A_3E_3| = |B_3F_3| = 8$ i istaknimo pravokutnik $A_3B_3F_3E_3$. Površina pravokutnika $A_3B_3F_3E_3$ je $8x$, a površina pravokutnika $E_3F_3C_3D_3$ je 20. Neka je točka G_3 polovište dužine $\overline{B_3F_3}$, te odredimo točku J_3 na dužini $\overline{E_3F_3}$ tako da vrijedi $|F_3G_3| = |F_3J_3|$. Zatim odredimo točku K_3 tako da je četverokut $G_3F_3J_3K_3$ kvadrat površine $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, tj. 16. Neka je H_3 točka na dužini $\overline{C_3D_3}$ za koju vrijedi $|G_3C_3| = |C_3H_3| = x - \frac{b}{2}$, a I_3 točka na pravcu G_3K_3 tako da vrijedi $|G_3I_3| = |G_3C_3|$, te je površina kvadrata $G_3C_3H_3I_3$ jednaka $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2$. Također vrijedi $|C_3F_3| = x-b$, $|I_3K_3| = |G_3I_3| - |G_3K_3| = x-b$, i $|D_3H_3| = |C_3D_3| - |C_3H_3| = \frac{b}{2}$.



Slika 3.

Neka je točka L_3 sjecište dužina $\overline{E_3F_3}$ i $\overline{H_3I_3}$. Pravokutnici $E_3L_3H_3D_3$ i $L_3I_3K_3J_3$ su međusobno sukladni, a njihova površina iznosi $(x-b)\frac{b}{2}$. Očito je površina kvadrata $G_3C_3H_3I_3$ jednaka zbroju površina pravokutnika $F_3C_3H_3L_3$, $L_3I_3K_3J_3$ i kvadrata $G_3F_3J_3K_3$, odnosno $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$, tj. $4^2 + 20 = 36$. S druge strane, stranica kvadrata $G_3C_3H_3I_3$ je duljine $x - \frac{b}{2}$, tj. $x - 4$, pa slijedi $x - 4 = 6$, tj. $x = 10$.

Promotrimo li sada Al-Khwarizmijeve metode rješavanja kvadratnih jednadžbi, pomislit ćemo da se opisanim postupcima ne mogu dobiti negativni brojevi kao rješenja. Razlog tomu je vrlo jednostavan. U vrijeme kad se razvila ova metoda, matematičari nisu poznavali negativne brojeve. Međutim, dane geometrijske metode zaista nalaze sve realne korijene promatranih kvadratnih jednadžbi.

Označimo s $-r$ negativan korijen jednadžbe $x^2 + bx = c$. Tada imamo $(-r)^2 + b(-r) = c$, tj. $r^2 = br + c$. Dakle, r je pozitivan korijen jednadžbe $x^2 = bx + c$. Sada možemo reći da je apsolutna vrijednost negativnog korijena jednadžbe $x^2 + bx = c$ pozitivan korijen jednadžbe $x^2 = bx + c$ i obratno.

Uzmimo za primjer jednadžbu $x^2 + 5x = 6$. Negativan korijen ove jednadžbe je -6, a 6 je pozitivan korijen jednadžbe $x^2 = 5x + 6$. Prema tome, kako bi se geometrijskom metodom zaista pronašli svi realni korijeni kvadratne jednadžbe, umjesto jedne jednadžbe potrebno je riješiti dvije na način kako je gore objašnjeno.

LITERATURA

1/ Victor J. Katz, *A History of Mathematics: An introduction* Addison-Wesley, 2009., str. 272.

2/ `http://www.wwu.edu/teaćingmathhistory/docs/psfile/alkhwarizmi1-student.pdf`, (12.1.2016.)

3/ A. Schipper, S. Spoelstra: *Illustrating the Quadratic Formula with Al-Khwarizmi's Algebra*, dostupno na web-stranici `http://www.amfidromie.nl/wisl901/goodpractices/2010-Khwarizmi.pdf`, (12.1.2016.)