Nejednadžbe

– varijacije na temu

Vesna Skočir, Zagreb

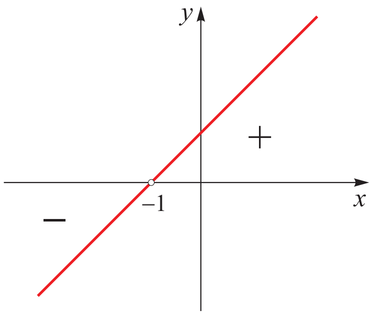
Matematika je intuitivna. Veliki je propust ako tijekom školovanja učenik ne osjeti taj dio njezine prirode. Krećemo li se uvijek istom stazom, uvježbavamo li uvijek iste osnovne formule, radimo li to na isti način kako bi učenicima bilo lakše shvatiti metodu, serviramo li udžbenike s gotovim rješenjima, neminovno je da se na tom putovanju prestajemo osvrtati. Važno je doći do cilja i to što prije. . . Ovo je putovanje rutinsko, na njemu se osjećamo sigurno, ali nas ljepota i energija krajolika ne dotiču. Baš zato ne smijemo odustati od istraživanja. Istraživanje daje slobodu kretanja – nepredvidivo je. Dobivamo "osjećaj prostora" neovisno o tome je li taj prostor opipljiv ili potpuno apstraktan. Taj je osjećaj pravo bogatstvo jer će nas ponekad voditi put rješenja, a ponekad nas "opteretiti" sumnjom da dobiveno rješenje (ma kako se račun činio dobar) nije ispravno. Ili će, kao u tekstu koji slijedi, sugerirati da alat koji posjedujemo može imati daleko širu primjenu. Da, baš je zato dobro ponekad i zalutati.

Važno svojstvo realne funkcije je njezin predznak, to jest podatak na kojem je dijelu domene funkcija pozitivna, a na kojem negativna. Za funkciju $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$, to bi značilo odrediti skup svih rješenja nejednadžbe $f(x) > 0$, $x \in D$, odnosno $f(x) < 0, x \in D$. Pritom se možemo koristiti jednom od strategija:

1. transformirati nejednadžbu u njoj ekvivalentnu koju znamo riješiti,
2. nacrtati graf funkcije i vidjeti gdje su vrijednosti te funkcije pozitivne/negativne (gdje se točke grafa nalaze iznad/ispod osi x).

Tako primjerice za linearnu funkciju $f(x) = x + 1$, zadanu na cijelom skupu $\mathbf{R}$, iz nejednadžbe $f(x) > 0$, $x + 1 > 0$, proizlazi $x > -1$. I slično, iz $f(x) < 0$, $x + 1 < 0$, proizlazi $x < -1$. Dakle, na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ funkcija je negativna, na $\langle -1, +\infty\rangle$ pozitivna, a jednaka je nuli za $x = -1$. Ovo rješenje možemo pročitati i iz grafa funkcije:

Vesna Skočir, prof., X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb, vsnskocir@gmail.com



U slučaju kvadratne nejednadžbe, primjerice $x^2 + 3x - 10 < 0$, prva dva člana nadopunimo na potpuni kvadrat i dobijemo:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 < 0$$

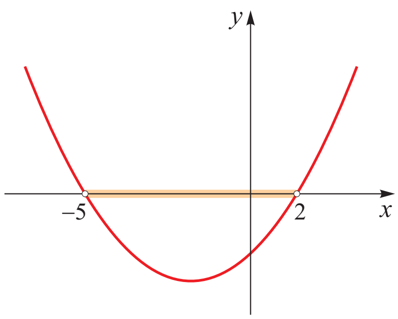
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$-\frac{7}{2} < x + \frac{3}{2} < \frac{7}{2},$$

i konačno $-5 < x < 2$.

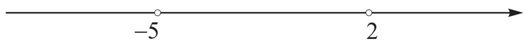
No samo će rijetki na ovaj način rješavati kvadratne nejednadžbe. Obično ih rješavamo grafički: odredimo njezine nul-točke (za $x^2 + 3x - 10 < 0$, to su $x_1 = -5$, $x_2 = 2$) i skiciramo graf:



Uočimo interval na kojem se graf nalazi ispod osi x. Taj interval predstavlja rješenje zadane nejednadžbe.

Da je kojim slučajem funkcija f bila faktorizirana, tj. zapisana u obliku $f(x) = (x+5)(x-2)$, sasvim je sigurno da bismo nejednadžbu $f(x) < 0$ rješavali skicom odgovarajuće kvadratne funkcije. No što bi se dogodilo kada bismo "zaboravili" da je umnožak dviju linearnih funkcija, kvadratna funkcija?

Nacrtamo brojevni pravac i na njemu označimo nul-točke funkcije:

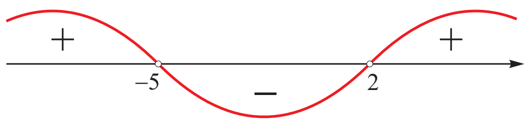


Tim točkama određeni su intervali: $\langle -\infty, -5 \rangle$, $\langle -5, 2 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$. Linearne funkcije

$$f_1(x) = x + 5, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{i}$$
$$f_2(x) = x - 2, \quad x \in \mathbf{R},$$

ne mijenjaju predznak unutar pojedinog intervala. Tako je primjerice funkcija $f_1(x) = x + 5$ negativna na intervalu: $\langle -\infty, -5 \rangle$, a pozitivna na intervalima $\langle -5, 2 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$. Zato je i predznak umnoška linearnih funkcija na pojedinim intervalima stalan. Da bismo ga odredili, dovoljno je uzeti bilo koju točku intervala i u njoj izračunati predznak:

Interval	Točka	Vrijednost funkcije: pozitivna/negativna
$\langle -\infty, -5 \rangle$	-10	$f(-10)=(-10+5)(-10-2)>0$
$\langle -5, 2 \rangle$	0	$f(0) = (0+5)(0-2) < 0$
$\langle 2, +\infty \rangle$	5	$f(5) = (5+5)(5-2) > 0$



Čitamo skup rješenja: $\langle -5, 2 \rangle$.

Kada na ovaj način funkciju "provučemo" kroz nul-točke, dobijemo valovitu krivulju: vrijednost funkcije iz pozitivne prelazi u negativnu i obratno. To nije slučajno. U svakoj od nul-točaka predznak mijenja samo jedan faktor. Zato, odredimo li predznak funkcije na jednome od intervala, znat ćemo njezin predznak i na ostalim intervalima. Ipak, treba biti oprezan. U slučaju višestrukih nul-točki ova pravilnost može biti narušena. Tako je primjerice funkcija $f(x) = (x-1)^2$ koja ima dvostruku nul-točku $x_{1,2} = 1$, pozitivna i na intervalu $\langle -\infty, 1\rangle$ i na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$.

Naizgled su to sve zgodne varijacije na temu kvadratnih nejednadžbi, ali bez neke osobite važnosti. No samo naizgled, jer ista se razmatranja mogu učinkovito primijeniti i na složenije funkcije: *ako se funkcija može napisati kao umnožak linearnih funkcija, onda je sličnim postupkom jednostavno odrediti na kojem je dijelu domene takva funkcija pozitivna, odnosno negativna.*

Pogledajmo to na sljedećim primjerima:

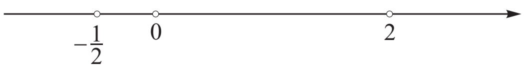
Primjer 1.

$$-2x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0.$$

Najprije faktoriziramo funkciju na lijevoj strani nejednadžbe:

$$-2x(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

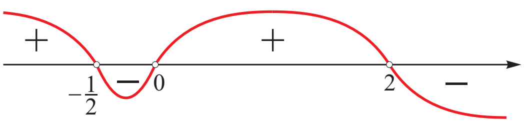
Označimo nul-točke na brojevnome pravcu kako bismo razaznali intervale. Zamijetimo da su sve nul-točke jednostruke, pa će funkcija promijeniti predznak prelaskom iz jednog u drugi interval.



Predznak funkcije možemo odrediti na bilo kojemu od njih. Primjerice,

$$1 \in \langle 0, 2\rangle\,, \quad f(1) = -2\cdot 1\cdot(1-2)\left(1+\frac{1}{2}\right) > 0.$$

To je dovoljno da pročitamo predznak funkcije i na ostalim intervalima:



Skup svih rješenje nejednadžbe jest: $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [2, +\infty\rangle$.

Zamijetimo da smo nacrtali i krivulju koja zorno prikazuje predznak funkcije. Napomenimo da to nije graf funkcije, nego samo "gruba" skica ponašanja funkcije na skupu $\mathbf{R}$. Ponekad se ovakva skica naziva "kvalitativni" graf funkcije.

Primjer 2.

$$\frac{x-1}{x^2-4} \leq \frac{x-1}{x-2}.$$

Nejednadžbu prevedemo u onu koja na desnoj strani ima nulu:

$$\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{x-1}{x-2} \leq 0.$$

Nakon sređivanja dobijemo:

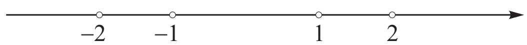
$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0.$$

Ova je nejednadžba ekvivalenta nejednadžbi

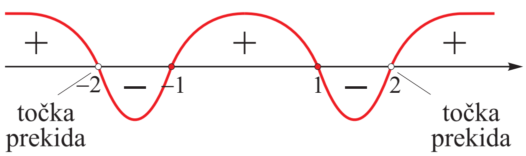
$$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \geq 0; \quad x \neq 2,\, x \neq -2.$$

Pronađemo njezina rješenja na cijelom skupu realnih brojeva te na kraju napravimo "korekciju" i iz dobivenog skupa rješenja "izbacimo" točke prekida $(x = 2, x = -2)$, ako su se u tom skupu našle.

I opet s pomoću brojevnoga pravca razaznamo intervale te potom odredimo predznak funkcije na jednome od njih.



$$0 \in \langle -1, 1\rangle \;:\; f(0) = (0-1)(0+1)(0-2)(0+2) > 0.$$



Rješenje: $\langle -\infty, -2\rangle \cup [-1, 1] \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

Primjer 3.

$$\frac{(x-1)^2(x-2)(x+4)}{(x+3)^3(x^2+3)} \geq 0.$$

Ova je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$(x-1)^2(x-2)(x+4)(x+3)^3(x^2+3) \geq 0, \ x \neq -3.$$

Faktor x^2+3 veći je od nule za svako $x \in \mathbf{R}$ pa ga smijemo "ispustiti" – ekvivalencija će i dalje ostati sačuvana.

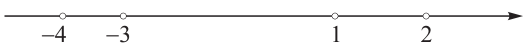
Faktor $(x-1)^2$ jednak je nuli jedino za $x=1$, a u svim je ostalim slučajevima veći od nule. I njega smijemo ispustiti, ali pamtimo da je $x=1$ rješenje dane nejednadžbe.

Slično, $(x+3)^3$ smijemo "skratiti" tako da umjesto njega zadržimo samo linearni član $(x+3)$. Naime, $x=-3$ sigurno nije rješenje nejednadžbe, jer u njoj funkcija sigurno nije definirana, a za sve ostale $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $(x+3)^2 > 0$.

Preostaje riješiti nejednadžbu:

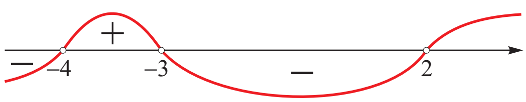
$$(x-2)(x+4)(x+3) \geq 0, \quad x \neq -3.$$

Označimo nul-točke na brojevnom pravcu:



Dobra je i "gruba" skica; važno je jedino da uređaj ostane sačuvan. Dalje postupamo kao u prethodnom primjeru:

$$0 \in \langle -3, 2 \rangle : f(0) = (0-2)(0+4)(0+3) < 0.$$



Dakle, skup rješenja je: $[-4, -3\rangle \cup \{1\} \cup [2, +\infty\rangle$.

Ovo je dobra prigoda da se (bez dokaza!) napravi korak dalje. Svojstvo neprekidnih funkcija:

Ako funkcija f, neprekidna na intervalu $\langle a, b \rangle$, niti u jednoj točki toga intervala nema vrijednost jednaku nuli, onda ona na tom intervalu ima stalan predznak.

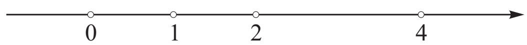
omogućuje da istu metodu intervala primijenimo i onda kad je funkcija f nejednadžbe $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), bilo koja neprekidna funkcija.

Pretpostavimo da funkcija f koja je neprekidna na cijelom području definicije ima konačan broj nul-točaka. Nul-točke dijele područje definicije na konačan broj intervala na kojima funkcija ima stalan predznak. Da bismo ga odredili, dovoljno je izračunati vrijednost funkcije u bilo kojoj točki intervala. Preostaje "provući" funkciju kroz nul-točke brojevnoga pravca i "pročitati" rješenje.

Primjer 4.

$$(x^2-4)(x-4)\ln x \geq 0.$$

Funkcija $f(x) = (x^2-4)(x-4)\ln x$ definirana je na intervalu na $\langle 0, +\infty \rangle$ i neprekidna je u svakoj točki toga intervala. Ima tri nul-točke ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$) kojima je područje definicije podijeljeno na četiri intervala:

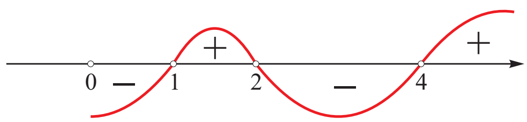


$$\langle 0, 1 \rangle, \ \langle 1, 2 \rangle, \ \langle 2, 4 \rangle, \ \langle 4, +\infty \rangle.$$

Kako je:

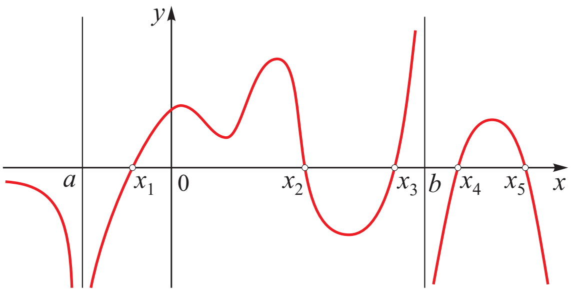
$$f(0.5) = (0.25-4)(0.5-4) \cdot \ln(0.5) < 0$$
$$f(1.5) = (2.25-4)(1.5-4) \cdot \ln(1.5) > 0$$
$$f(3) = (9-4)(3-4) \cdot \ln(3) < 0$$
$$f(5) = (25-4)(5-4) \cdot \ln 5 > 0$$

slijedi da vrijedi:



Rješenje nejednadžbe je skup: $[1, 2] \cup [4, +\infty\rangle$.

Funkcija f čiji je graf prikazan na slici, neprekidna je na intervalima $\langle -\infty, a\rangle$, $\langle a, b\rangle$ i $\langle b, +\infty\rangle$. Njezine su nul-točke x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5, a u točkama a i b ima prekid.



Iz grafa je lako vidjeti da je skup $[x_1, x_2] \cup [x_3, b\rangle \cup [x_4, x_5]$ rješenje nejednadžbe $f(x) \geq 0$.

Nejednadžbe zadane i ovako složenijim funkcijama možemo riješiti na već opisani način. Treba samo pronaći intervale na kojima se predznak funkcije ne mijenja. To znači da na brojevnome pravcu uz nul-točke treba označiti i točke prekida, razaznati intervale te odrediti predznak na svakome od njih.

Primjer 5.

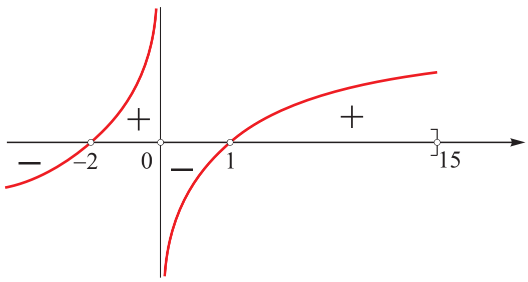
$$\frac{(x^2-4)\sqrt{15-x}}{x} \leq 0.$$

Zbog korijena funkciju promatramo na intervalu $\langle -\infty, 15]$. Njezine su nul-točke $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 15$, a u točki $x = 0$ ima prekid. Tim su točkama određeni intervali:

$$\langle -\infty, -2], \ \langle -2, 0\rangle, \ \langle 0, 2\rangle, \ \langle 2, 15].$$

U svakome od njih odaberemo jednu točku i izračunamo vrijednost funkcije u toj točki. Primjerice, $f(1) = \frac{(1^2-4)\sqrt{15-1}}{1} < 0$, pa odatle znamo da je funkcija negativna na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

Na kraju dobijemo valovitu krivulju:



iz koje "čitamo" rješenje: $\langle -\infty, -2] \cup \langle 0, 2] \cup \{15\}$.

Matematički obećavajuća 2016. godina

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = \mathbf{2016}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = \binom{64}{2} = \mathbf{2016}$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = \mathbf{2016}$$

$$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 63^3} = \mathbf{2016}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - 62^2 + 63^2 = \mathbf{2016}$$

$$666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 = \mathbf{2016}$$

$$888+888+88+88+8+8+8+8+8+8+8+8 = \mathbf{2016}$$

$$999 + 999 + 9 + 9 = \mathbf{2016}$$

$$1234 + 567 + 89 + 123 + 1 + 2 = \mathbf{2016}$$

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 = 2^{6-1}(2^6 - 1) = \mathbf{2016}$$