Od jednostavnog
do složenog kamatnog računa

Sonja Banić, Ivanić Grad

Očekujemo da učenici o osnovnoj školi upoznaju jednostavni kamatni račun i primijene ga u životnim situacijama. U stvarnosti, jednostavni kamatni račun primjenjuje se rijetko, uglavnom za vremenska razdoblja kraća od godine dana i u kratkoročnim potrošačkim kreditima. U većini primjera štednje i dugovanja primjenjuje se složeno ukamaćivanje.

Učenici osnovne škole mogu kroz primjere pojmiti princip složenog ukamaćivanja, ali za izračun svih vrijednosti potrebno je znanje potencija s racionalnim eksponentom te aritmetičkog i geometrijskog niza. Stoga se složeni kamatni račun i njegova primjena mogu učiti tek u srednjoj školi. Zbog važnosti financijske pismenosti ova tema trebala bi se poučavati u svim programima srednjoškolskog obrazovanja.

Osnovna razlika između jednostavnog i složenog kamatnog računa je u tome što se kod jednostavnog računa kamata za svako razdoblje ukamaćivanja računa uvijek od iste glavnica, dok se kod složenog kamatnog računa za svako razdoblje kamata pripisuje glavnici. Kažemo da je kod složenog kamatnog računa glavnica promjenjiva, odnosno da se računa "kamata na kamatu".

Razdoblje ukamaćivanja je razdoblje nakon kojeg se kamata pripisuje glavnici. Uobičajeno je da se kamatna stopa odnosi na godinu dana, pa su jednostavni primjeri kamatnog računa oni kada se i ukamaćivanje vrši godišnje. U stvarnosti to često nije slučaj, pa će i takvi primjeri biti prikazani.

Formula složenog ukamaćivanja

U daljnjem tekstu koristit ćemo se oznakama:

C_0 – početna vrijednost iznosa (početna glavnica)

C_n – konačna vrijednost iznosa (glavnice) nakon n-tog razdoblja ukamaćivanja (nakon n godina)

Sonja Banić, prof. savjetnik, Srednja škola "Ivan Švear", Ivanić Grad, `sonja.banic@zg.t-com.hr`

K_n – kamate za n-to razdoblje ukamaćivanja

K – ukupne složene kamate

n – broj razdoblja ukamaćivanja (broj godina)

p – kamatna stopa (godišnja).

Nastavnik će procijeniti treba li prije izvoda formule pokazati primjer složenog ukamaćivanja s konkretnim brojevima, ili može odmah prikazati račun simbolima.

Izvod formule: Kolikim će iznosom štediša raspolagati nakon n godina ako uloži iznos C_0 uz kamatnu stopu p? Obračun kamata je složen i godišnji. Koliko iznose ukupne složene kamate?

Obračun kamata je složen i godišnji, što znači da se nakon svakih godinu dana kamate pripisuju glavnici.

Nakon prve godine štediša dobiva $K_1 = C_0 \cdot \frac{p}{100}$ kamata, i ima

$$C_1 = C_0 + K_1 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Nakon druge godine: $K_2 = C_1 \cdot \frac{p}{100}$,

$$C_2 = C_1 + K_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,$$

itd.

Očito, nakon n godina

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Matematičari se običavaju koristiti dobivenom formulom u ovom obliku. U ekonomskoj matematici definira se dekurzivni kamatni faktor $r = 1 + \frac{p}{100}$, i zamjenom dobivamo osnovnu formulu složenog kamatnog računa:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot r^n.}$$

Iz formule se jasno čita eksponencijalna ovisnost konačne vrijednosti iznosa o vremenu ukamaćivanja.

U primjerima je korisno mijenjati jedan parametar i promatrati kako se mijenja konačna vrijednost iznosa.

Primjer 1. Koliki iznos treba uložiti na štednju danas ako za 4 godine želimo raspolagati sa 5000 kuna. Koliko će iznositi ukupne složene kamate? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka primjenjuje fiksnu kamatnu stopu od:

1) 2.5 % **2)** 3 % **3)** 4 % **4)** 5 %.

Rješenje. Traži se početna vrijednost C_0. Vrijedi $C_0 = C_n : r^n$. Ukupne kamate su razlika između konačne i početne vrijednosti uloga: $K = C_n - C_0$.

1) Treba uložiti 4529.75 kuna, a ukupne složene kamate iznose 470.25 kuna.

2) 4442.44 kn, 557.56 kn.

3) 4274.02 kn, 725.98 kn.

4) 4113.51 kn, 886.49 kn.

Što je veća kamatna stopa, manji je početni ulog, ali vrijedi uočiti da dvostruko veća stopa ne znači dva puta veće kamate.

Primjer 2. Kolika je konačna vrijednost iznosa od 10 000 kuna, uloženog uz nepromjenjivu kamatnu stopu 3 % godišnje nakon

1) 3 godine **2)** 6 godina **3)** 12 godina.

Koliko iznose ukupne složene kamate?

Rješenje. Prvo izračunamo kamatni faktor:

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1.03.$$

1) $C_3 = 10\,000 \cdot 1.03^3 = 10\,000 \cdot 1.092727$
$= 10\,927.27.$

Konačna vrijednost uloga je 10 927.27 kuna, a ukupne složene kamate iznose 927.27 kuna.

2) $C_6 = 10\,000 \cdot 1.03^6 = 10\,000 \cdot 1.194052297$
$= 11\,940.52.$

Konačna vrijednost uloga je 11 940.52 kune, a ukupne složene kamate iznose 1940.52 kune.

3) $C_{12} = 10\,000 \cdot 1.03^{12} = 10\,000 \cdot 1.42576089$
$= 14\,257.61.$

Konačna vrijednost uloga je 14 257.61 kuna, a ukupne složene kamate iznose 4257.61 kunu.

Uočimo: vremenska razdoblja su se udvostručila, ali kamate su uvećane više od dva puta. Kako bi se još jasnije uočilo da se radi o eksponencijalnoj ovisnosti, možemo od učenika tražiti da grafički prikažu iznos kamata u ovisnosti o vremenu ukamaćivanja. Poželjno se za prikaze koristiti proračunskim tablicama ili programima dinamičke geometrije.

Vremensko razdoblje nakon kojeg tražimo konačnu vrijednost iznosa ne mora se nužno poklapati s cijelim brojem razdoblja ukamaćivanja. U tom slučaju najjednostavnije je da vrijeme izrazimo u obliku decimalnog broja i tako izračunamo konačnu vrijednost uloga. No to nije jedini pristup, pa ćemo razmotriti i ostale mogućnosti.

Primjer 3. Neka osoba uloži u banku 10 000 kuna. Banka primjenjuje kamatnu stopu 3 % godišnje. Obračun kamata je složen i godišnji. Kolika će biti vrijednost tog uloga nakon

a) 3 godine **b)** 3 i pol godine
c) pola godine **d)** 3 godine i 8 mjeseci?

Kolike su ukupne složene kamate?

Rješenje.

a) $C_3 = 10\,000 \cdot 1.03^3 = 10\,927.27$ kuna,
$K = 927.27$ kuna.

b) Tri i pol godine možemo zapisati kao 3.5 godina, pa imamo:

$$C_{3.5} = 10\,000 \cdot 1.03^{3.5} = 11\,089.97 \text{ kuna},$$
$$K = 1089.97 \text{ kuna}.$$

c) Pola godine je $\dfrac{6}{12} = 0.5$ godina,

$$C_{0.5} = 10\,000 \cdot 1.03^{0.5} = 10\,148.897 \text{ kuna},$$
$$K = 148.89 \text{ kuna}.$$

d) 3 godine i 8 mjeseci je 44 mjeseca, a to je $\dfrac{44}{12}$ godine, pa vrijednost uloga računamo na sljedeći način:

$$C_n = 10\,000 \cdot 1.03^{\frac{44}{12}} = 11\,144.74 \text{ kuna},$$
$$K = 1144.74 \text{ kuna}.$$

Ovakav način obračuna kamata naziva se konformna metoda. Njeno je svojstvo da daje istu vrijednost kamata bez obzira na učestalost ukamaćivanja. No u literaturi i udžbenicima ekonomske matematike konformna metoda ukamaćivanja nije prikazana na ovaj način. Razlozi tome su prvenstveno povijesni, ali i u nešto drukčijem pristupu postupku ukamaćivanja.

Prije izuma računala i kalkulatora vrijednosti potencija kamatnog faktora očitavale su se iz ekonomskih tablica. Zbog toga bilo je nužno da eksponent bude prirodan broj, pa se kamatna stopa prilagođavala razdoblju ukamaćivanja. Ako bismo tražili kamate za 3 godine i 8 mjeseci, tj. za 44 mjeseca, trebali bismo prilagoditi kamatnu stopu, tj. kamatni faktor kako bismo iz tablica očitali odgovarajuću vrijednost potencije. Izračunavala se konformna kamatna stopa p', takva da za odgovarajući kamatni faktor r' vrijedi $r'^{44} = r^{\frac{44}{12}}$. Očito je da je u ovom slučaju $r' = r^{\frac{1}{12}}$, odnosno

$$p' = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right).$$

Uz današnje kalkulatore nema potrebe za izračunavanjem konformne kamatne stope, već je jednostavnije direktno izračunati konačnu vrijednost iznosa.

Osim konformne, često se primjenjuje i proporcionalna metoda izračuna kamata, odnosno relativna kamatna stopa koja se proporcionalno usklađuje s razdobljem ukamaćivanja. Riješimo prethodni primjer, ali uz mjesečni obračun kamata i primjenu relativne kamatne stope.

Primjer 4. Neka osoba uloži u banku 10 000 kuna. Banka primjenjuje kamatnu stopu 3 % godišnje. Obračun kamata je složen i mjesečni. Kolika će biti vrijednost tog uloga nakon

a) 3 godine **b)** 3 i pol godine
c) pola godine **d)** 3 godine i 8 mjeseci?

Primijeni relativnu kamatnu stopu. Koliko iznose ukupne složene kamate?

Rješenje. Mjesečni obračun kamata znači da se na kraju svakog mjeseca kamata pripisuje glavnici.

Ako je godišnja kamatna stopa 3 %, proporcionalna mjesečna kamatna stopa je $3:12=0.25\ \%$. Dekurzivni kamatni faktor je 1.0025, pa imamo:

a) Tri godine je 36 mjeseci,

$$C_{36}=10\,000\cdot 1.0025^{36}=10\,940.51 \text{ kuna}, \quad K=940.51 \text{ kuna}.$$

b) Tri i pol godine su 42 mjeseca,

$$C_{42}=10\,000\cdot 1.0025^{42}=11105.65 \text{ kuna}, \quad K=1105.65 \text{ kuna}.$$

c) Pola godine je 6 mjeseci,

$$C_{6}=10\,000\cdot 1.0025^{6}=10\,150.94 \text{ kune}, \quad K=150.94 \text{ kune}.$$

d) 3 godine i 8 mjeseci je 44 mjeseca,

$$C_{44}=10\,000\cdot 1.0025^{44}=11\,161.25 \text{ kuna}, \quad K=1161.25 \text{ kuna}.$$

Usporedimo li ovaj primjer s primjerom 3, u kojem smo primijenili konformnu metodu, vidimo da smo dobili veću kamatu. Kod proporcionalne metode iznos kamata ovisi o učestalosti ukamaćivanja. Što je ukamaćivanje češće, kamata je veća. Zato je proporcionalna metoda nepovoljna za dužnike, a povoljna za vjerovnike i štediše. Banke primjenjuju oba načina obračuna kamata, i na to treba obratiti pažnju prilikom sklapanja ugovora.

Skraćivanjem razdoblja ukamaćivanja proporcionalna metoda vodi do kontinuiranog ukamaćivanja.

Štednja periodičnim uplatama

Primjer štednje koji često susrećemo su periodičke uplate. Štedimo tako da redovito periodički (mjesečno, kvartalno, godišnje) uplaćujemo određeni iznos na štednju, osiguranje i slično. Postavlja se pitanje kolika je ukupna vrijednost uplata nakon određenog vremenskog razdoblja. Najjednostavnije je razmatrati godišnje uplate.

Primjer 5. Kolikim ćemo iznosom raspolagati nakon 4 godine, ako na početku svake godine uložimo 1200 kuna. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka primjenjuje fiksnu kamatnu stopu od 3 %.

Rješenje. Prvi iznos koji smo uložili bit će u banci četiri godine, sljedeći tri godine, pa dvije i posljednji jednu godinu. Ukupna vrijednost je:

$$\begin{aligned}1200\cdot1.03^4+1200\cdot1.03^3+1200\cdot1.03^2+1200\cdot1.03^1\\ &=1350.61+1311.27+1273.08+1236\\ &=5170.96\end{aligned}$$

Tijekom 4 godine uložili smo 4800 kuna. Na kraju štednje raspolagat ćemo sa 5170.96 kuna. Ukupno smo dobili 370.96 kuna kamata.

Uočimo da iznosi u primjeru čine geometrijski niz kojemu je prvi član 1236, a kvocijent kamatni faktor 1.03. Primjenom zbroja članova geometrijskog niza možemo pojednostavniti račun, što je posebno važno za veći broj uplata.

Ovakvi oblici štednje su česti, pa se u ekonomskoj matematici za izračun primjenjuje formula.

Iznos koji svake godine ulažemo označimo sa R (rata). Prva rata se ukamaćuje n godina, druga $n-1$ godinu, sve do posljednje koja se ukamaćuje samo 1 godinu. Ukupna vrijednost uloženih iznosa je zbroj vrijednosti svake rate na kraju štednje:

$$\begin{aligned}S_n&=C_1+C_2+\ldots+C_n\\ &=R\cdot r+R\cdot r^2+\ldots+R\cdot r^n\\ &=R\cdot r\left(1+r+\ldots+r^{n-1}\right).\end{aligned}$$

U zagradi prepoznajemo zbroj prvih n članova geometrijskog niza. Sređivanjem dobivamo formulu:

$$\boxed{S_n=R\cdot r\cdot\frac{r^n-1}{r-1}.}$$

Ovaj izračun u ekonomskoj se matematici naziva konačna vrijednost prenumerando periodičkih uplata (isplata). Naziv prenumerando znači da se uplate vrše na početku perioda (godine), za razliku od postnumerando uplata, koje se vrše na kraju perioda (godine).

U ovakvim oblicima štednje najčešće štedimo mjesečno, zato preoblikujmo primjer 5 u mjesečnu štednju.

Primjer 6. Neka osoba kroz 4 godine štedi 100 kuna mjesečno. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka primjenjuje fiksnu kamatnu stopu od 3 %. Kolikim će iznosom ta osoba raspolagati po isteku štednje?

Rješenje. Zadatak se može riješiti primjenom formule, ali i primjenom zbroja članova geometrijskog niza, ako nismo izveli formulu. Obračun kamata je godišnji, stoga ćemo primijeniti konformnu metodu obračuna.

Prvi ulog je u banci 4 godine, pa je njegova vrijednost po isteku štednje

$$C_{48} = 100 \cdot 1.03^4 = 100 \cdot 1.03^{\frac{48}{12}} = 112.55 \text{ kuna.}$$

Sljedeći ulog je na štednji jedan mjesec kraće i njegova vrijednost po isteku štednje je

$$C_{47} = 100 \cdot 1.03^{\frac{47}{12}} = 112.27 \text{ kuna.}$$

Dalje imamo redom

$$C_{46} = 100 \cdot 1.03^{\frac{46}{12}}, \ \ldots$$

sve do posljednjeg iznosa koji je na štednji samo mjesec dana, pa je njegova vrijednost po isteku štednje

$$C_1 = 100 \cdot 1.03^{\frac{1}{12}}.$$

Vidimo da konačne vrijednosti uloga čine geometrijski niz od 48 članova, čiji je prvi član $100 \cdot 1.03^{\frac{1}{12}}$, posljednji $100 \cdot 1.03^{\frac{48}{12}}$. Kvocijent niza je $q = 1.03^{\frac{1}{12}}$. Ukupna vrijednost uloga na kraju štednje je zbroj svih članova tog niza,

$$S_{48} = 100 \cdot 1.03^{\frac{1}{12}} \frac{1.03^{\frac{48}{12}} - 1}{1.03^{\frac{1}{12}} - 1} = 5101.56 \text{ kuna.}$$

Budući da je ukupno uloženo 4800 kuna, ukupne složene kamate iznose 301.56 kuna.

U primjeru s godišnjom štednjom ukupne kamate su veće jer je odmah na početku godine uložen cijeli godišnji iznos, dok se u primjeru s mjesečnom štednjom godišnji iznos ulaže u obrocima kroz godinu.

Teme iz složenog kamatnog računa možemo obraditi kao primjere primjene eksponencijalne funkcije i geometrijskog niza. Na taj način učenike ćemo potaknuti na promišljanje o potrošnji i štednji. Uz to gradivo mogu se povezati i primjeri o vraćanju dugovanja i kreditima, što će biti tema zasebnog članka.