

O jednom Steinerovu teoremu

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

U matematičkoj literaturi iz geometrije trokuta nezaobilazno mjesto ima sljedeći teorem koji glasi:

Ako su simetrale dvaju kutova trokuta jednake, trokut je jednakokrakan.

Dokaz ovog teorema nije jednostavan za razliku od obrata ovog teorema koji je veoma lagan. Ovaj teorem je u literaturi poznat kao **Steinerov teorem**¹. Recimo i to da se sedam raznih dokaza ovog teorema može naći u [1].



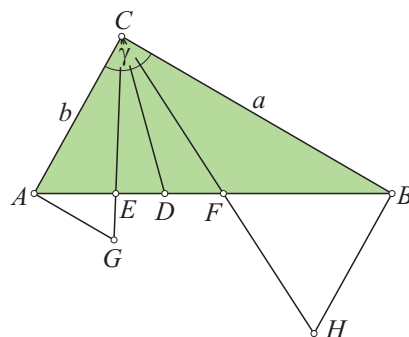
Jakob Steiner

U ovom ćemo članku dati dokaz još jednog Steinerova teorema koji glasi:

U trokutu ABC je CD ($D \in AB$) simetrala unutarnjeg kuta γ , a dužine $\overline{CE}$ i $\overline{CF}$ ($E, F \in AB$) zatvaraju jednake kutove s dužinom $\overline{CD}$. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{|AE|}{|BE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{b^2}{a^2}. \quad (1)$$

Dokaz. Neka je $\overline{AG} \parallel \overline{CB}$, tako da je $G \in CE$ i $\overline{BH} \parallel \overline{AC}$, tako da je $H \in CF$ te $|AC| = b$ i $|BC| = a$. Tada, na osnovu Talesova teorema (vidi



sliku) dobijemo:

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AG|}{a} \quad (2)$$

i

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{b}{|BH|}. \quad (3)$$

Iz jednakosti $\angle ACD = \angle DCB$ i $\angle ECD = \angle DCF$ slijedi da je i

$$\angle ACG = \angle HCB. \quad (4)$$

Zbog $BH \parallel AC$ i $AG \parallel BC$ slijedi da je:

$$\angle GAC = \angle CBH. \quad (5)$$

Sada iz (4) i (5) dobivamo da je $\triangle ACG \sim \triangle BCH$, a odavde:

$$\frac{|AG|}{|BH|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}. \quad (6)$$

Potom iz (2), (3) i (6) slijedi:

$$\frac{|AE|}{|BE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AG|}{a} \cdot \frac{b}{|BH|} = \frac{b}{a} \cdot \frac{|AG|}{|BH|} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2}. \quad \blacksquare$$

Prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, asefket@pmf.unsa.ba

¹ Jakob Steiner, (1796. – 1863.), njemački matematičar koji je rođen u Švicarskoj.

Ovaj teorem ima nekoliko značajnih posljedica.

$$\iff \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{b}{a}. \quad (8)$$

Posljedica 1. Ako je dužina $\overline{CE}$ simetrala stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC , tada je $|AE| = |EB|$, pa iz (1) slijedi da je

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{b^2}{a^2}. \quad (7)$$

Posljedica 2. Ako je dužina $\overline{CE}$ simetrala kuta $\gamma = ACB$ trokuta ABC , tada je $|CE| = |CD| = |CF| \implies |AE| = |AD|$ i $|BF| = |BD|$. Sada iz (1) slijedi:

$$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{b^2}{a^2} \iff \frac{|AD|^2}{|BD|^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

Jednakost (7) je poznati teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta.

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

2/ M. Mettler, *Vom Charme der "verblassten" Geometrie*, Verlag Eurobit Temeswar, 2000.

9. stručno-metodički skup Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi

Pula 2015.



Poštovane kolegice i kolege!

Pozivamo vas na 9. stručno-metodički skup – *Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi* koji će se održati

od 5. do 7. studenoga 2015., u Puli, hotel "Park Plaza Histria".

Tema skupa: **Zadatci u nastavi matematike.**

Na skup su pozvani svi učitelji matematike osnovnih škola, nastavnici matematike srednjih škola te sveučilišni profesori Republike Hrvatske i šire. Predavači i voditelji radionica bit će naši istaknuti sveučilišni profesori, učitelji i nastavnici te savjetnici Agencije za odgoj i obrazovanje. Na skupu će se raditi plenarno i u radionicama, bit će i okruglih stolova, izložbi i promocija. Skup se organizira u suradnji s Agencijom za odgoj i obrazovanje.

Pozivamo vas da i na ovome, devetome po redu skupu aktivno sudjelujete kao predavač i/ili voditelj radionice.

Prijave na skup do 4. studenoga 2015. na <http://www.ettaedu.eu>.

Organizacijski odbor skupa: Robert Gortan, Irena Bratulić, Zvonko Jovičić, Vesna Vujasin Ilić, Ljubica Perić, Branka Antunović-Piton i Vesko Nikolaus.

Više o skupu pročitajte na <http://md-istra-skup-pula.blogspot.com/>

za MDI, Robert Gortan, prof.