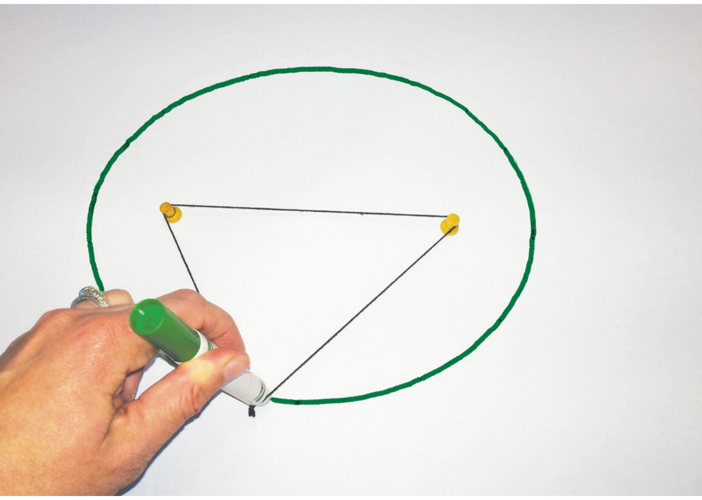
Otkrivanje elipse



Maja Starčević,
Ivana Laštro, Zagreb

Elipsa se u nastavi matematike uvodi kao skup točaka za koje vrijedi da im je zbroj udaljenosti od dvije zadane točke (fokusa) konstantan. Nakon toga, običaj je odmah prijeći na pripadni koordinatni zapis koji se koristi pri rješavanju svih zadataka. Učenici stoga često zaborave početnu definiciju. U radu ćemo pokazati kako osmisliti i riješiti zadatak otkrivanja oblika elipse korištenjem njezine osnovne definicije.

Učenici elipsu uglavnom povezuju s njezinom jednadžbom u koordinatnom sustavu. Ako je pravokutni koordinatni sustav zadan tako da x-os odgovara pravcu koji prolazi kroz fokuse elipse, a y-os prolazi kroz polovište dužine koja spaja fokuse, tada jednadžba glasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

gdje je a duljina velike poluosi, dok je b duljina male poluosi. Veličine a i b su povezane preko udaljenosti fokusa F_1 i F_2 tj. vrijedi $4(a^2-b^2)=|F_1F_2|^2$. Nakon što odaberemo fokuse elipse, očito je da je dovoljno odabrati veličinu a kako bi elipsa bila određena. Pritom mora vrijediti $2a>|F_1F_2|$.

Elipsa se međutim definira kao geometrijsko mjesto točaka za koje je zbroj udaljenosti do dvije zadane točke jednak nekoj konstanti. Ta definicija učenicima lakše ostaje u sjećanju ako im pokažemo kako konstruirati elipsu koristeći se definicijom. Konkretno, možemo izvesti tzv. vrtnu konstrukciju elipse [2], ili konstrukciju u nekom od programa dinamičke geometrije [3]. Ovdje ćemo pokazati kako otkriti osnovna svojstva elipse koristeći se njezinom definicijom. Definirat ćemo stoga krivulju $\mathcal{K}$ u ravnini M s

$$\mathcal{K}=\{T\in M\ :\ |F_1T|+|F_2T|=2a\}, \qquad (2)$$

za neki $a>0$. Redom ćemo otkrivati njezina svojstva i doći do zaključka da ima oblik elipse. Taj oblik nam je poznat i iz svakodnevnog života. Želimo dakle istražiti kako izgleda krivulja $\mathcal{K}$ ne uvodeći koordinatni sustav.

Prvo što primjećujemo je simetričnost pri definiciji krivulje $\mathcal{K}$, u smislu da su udaljenosti do točaka F_1 i F_2 zastupljene na jednak način. Neka je stoga pravac s simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$. Svakoj točki T koja se nalazi na krivulji $\mathcal{K}$ i ne pripada pravcu s možemo pridružiti njezinu sliku T' dobivenu zrcaljenjem preko pravca s. Kako je i F_1 simetrična točki F_2 s obzirom na pravac s, a zrcaljenje čuva udaljenost, vrijedi $|F_1T'|=|F_2T|$ i $|F_2T'|=|F_1T|$ pa dobivamo

$$|F_1T'|+|F_2T'|=|F_2T|+|F_1T|=2a.$$

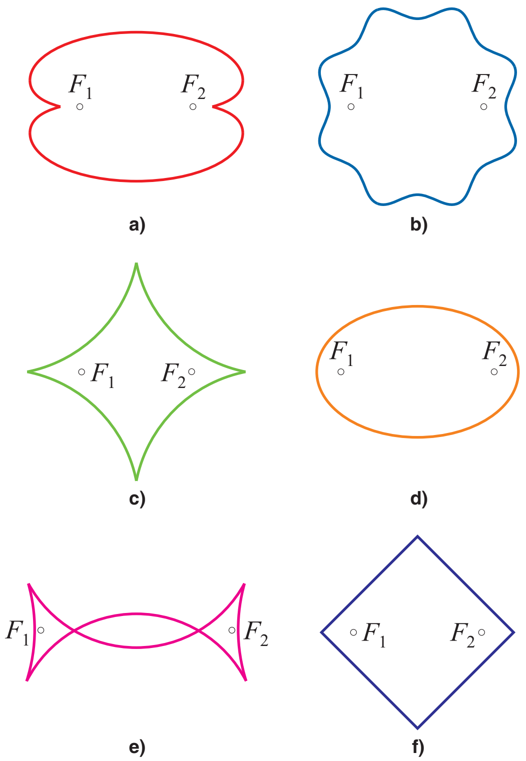
Zaključujemo da se točka T' također nalazi na $\mathcal{K}$. Dakle, $\mathcal{K}$ je krivulja koja je simetrična s obzirom na pravac s.

Do sličnog zaključka dolazimo i ako zrcalimo krivulju s obzirom na pravac p koji prolazi kroz točke F_1 i F_2. Neka je T točka krivulje $\mathcal{K}$ koja se ne nalazi na pravcu p. Neka je T'' točka koja je simetrična točki T s obzirom na pravac p. Kako je zrcaljenje izometrija, imamo $|F_1T''| = |F_1T|$ i $|F_2T''| = |F_2T|$ te je

$$|F_1T''| + |F_2T''| = |F_1T| + |F_2T| = 2a.$$

Zaključujemo da je $\mathcal{K}$ simetrična i s obzirom na pravac p.

Sada znamo da je $\mathcal{K}$ krivulja koja je simetrična s obzirom na dva međusobno okomita pravca. Također, za $T \in \mathcal{K}$, zbog $|F_2T| > 0$, mora biti $|F_1T| = 2a - |F_2T| < 2a$. Time dolazimo do zaključka da je $\mathcal{K}$ ograničena krivulja. Pretpostavimo intuitivno da je $\mathcal{K}$ povezana krivulja. Na slici 1 vidimo primjere nekih krivulja koje zadovoljavaju dosad otkrivena svojstva.

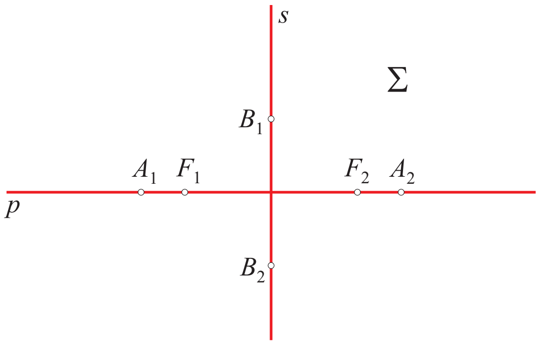


Slika 1.

Pitamo se dalje postoji li točka krivulje $\mathcal{K}$ koja pripada pravcu p, odnosno zanima nas koliko ima takvih točaka. Ako se ta točka, nazovimo je T, nalazi na dužini $\overline{F_1F_2}$, tada vrijedi $|F_1T| + |F_2T| = |F_1F_2|$. Ova jednakost vrijedi ako i samo ako je $|F_1F_2| = 2a$. S obzirom na to da je a odabran tako da je $|F_1F_2| < 2a$, ne postoji točka krivulje $\mathcal{K}$ koja pripada dužini $\overline{F_1F_2}$. S druge strane, ako je točka $T \in \mathcal{K}$ na pravcu p, izvan dužine $\overline{F_1F_2}$ (npr. bliže točki F_1), onda vrijedi $|F_1T| + |F_2T| = |F_1T| + (|F_1T| + |F_1F_2|) = 2a$. Dakle, imamo $|F_1T| = \frac{1}{2}(2a - |F_1F_2|)$. Analogno je točka koja je presjek pravca p i $\mathcal{K}$ i bliža je točki F_2 određena sa $|F_2T| = \frac{1}{2}(2a - |F_1F_2|)$. Označimo te dvije točke redom sa A_1 i A_2.

Ako se točka $T \in \mathcal{K}$ nalazi na simetrali s, onda znamo da je jednako udaljena od F_1 i F_2. Zbog (2) onda vrijedi $|F_1T| = |F_2T| = a$, odnosno imamo samo dvije takve točke, po jednu sa svake strane pravca p i one su simetrične s obzirom na pravac p. Nazovimo ih B_1 i B_2. Sada možemo primijetiti da krivulja na slici 1e) ne odgovara našoj krivulji.

Sljedeći problem je preciznije odrediti oblik zadane krivulje. Podijelimo ravninu M pravcima p i s na četiri dijela. Zbog simetrije krivulje $\mathcal{K}$ s obzirom na p i s dovoljno ju je izučavati unutar samo jednog od tih četiriju dijelova ravnine. Ako su točke F_1 i F_2 postavljene tako da je pravac p horizontalan, proučavat ćemo dio krivulje $\mathcal{K}$ koji pripada gornjem desnom dijelu ravnine. Nazovimo ga Σ (slika 2).



Slika 2.

Prvo se pitamo je li moguće da postoje dvije točke na krivulji $\mathcal{K}$ koje pripadaju Σ, nazovimo ih T_1 i T_2 koje se nalaze na istoj udaljenosti od pravca p. Pretpostavimo da postoje. Primjećujemo da su u tom slučaju površine trokuta $F_1F_2T_1$ i $F_1F_2T_2$ jednake, s obzirom na to da su im visine na stranicu $\overline{F_1F_2}$ jednake duljine. Vidimo da ti trokuti imaju i jednake opsege. Označimo redom duljine stranica tih trokuta s $|F_1F_2| = d$, $|F_1T_1| = e_1$, $|F_2T_1| = f_1$, $|F_1T_2| = e_2$, $|F_2T_2| = f_2$. Označimo sa s_1 i s_2 poluopsege promatranih trokuta. Prema Heronovoj formuli slijedi

$$\begin{aligned}\sqrt{s_1(s_1-d)(s_1-e_1)(s_1-f_1)} \\ = s_2(s_2-d)(s_2-e_2)(s_2-f_2).\end{aligned} \tag{3}$$

Kako je $s_1 = s_2$ iz (3) slijedi

$$(s_1-e_1)(s_1-f_1) = (s_2-e_2)(s_2-f_2)$$

odnosno

$$\begin{aligned}(-e_1+f_1+d)(e_1-f_1+d) \\ = (-e_2+f_2+d)(e_2-f_2+d).\end{aligned}$$

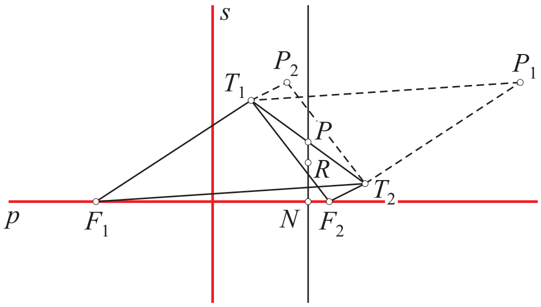
Iz prethodne jednakosti dobivamo $d^2-(e_1-f_1)^2 = d^2-(e_2-f_2)^2$ pa je $e_1-f_1 = e_2-f_2$ ili $e_1-f_1 = -(e_2-f_2)$. Kako je $e_1+f_1 = e_2+f_2$, prva mogućnost daje $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$, a druga $e_1 = f_2$ i $f_1 = e_2$. S obzirom na to da su $T_1, T_2 \in \Sigma$, može vrijediti samo prva mogućnost (u drugom slučaju se točke T_1 i T_2 ne mogu obje nalaziti u Σ) pa zaključujemo da se točke T_1 i T_2 podudaraju. Sada primjećujemo da udaljenost do pravca p točaka koje pripadaju $\mathcal{K}$ i Σ, a nalaze se između točaka B_1 i A_2 strogo pada. U protivnom bismo, naime, imali barem dvije točke iz tog skupa koje su jednako udaljene od pravca p što je prema prethodnom računu nemoguće. Dakle, krivulja $\mathcal{K}$ ne može izgledati kao na slici 1b).

Nadalje, možemo zaključiti da u Σ ne postoje dvije točke krivulje $\mathcal{K}$ koje su jednako udaljene od pravca s. Pretpostavimo suprotno: da to svojstvo zadovoljavaju točke T_1 i T_2. Pretpostavimo da je T_2 udaljenija od pravca p. Tada očito vrijedi $|F_1T_1| < |F_1T_2|$ i $|F_2T_1| < |F_2T_2|$. Dakle $2a = |F_1T_1| + |F_2T_1| < |F_1T_2| + |F_2T_2| = 2a$, čime smo došli do kontradikcije. Prema tomu, $\mathcal{K}$ ne nalikuje ni krivulji na slici 1a).

Na sam oblik krivulje, međutim, uvelike utječe i svojstvo konveksnosti ili konkavnosti. Konkretno, pitamo se u kojem je smjeru krivulja udubljena. Sada ćemo matematički opisati taj problem. Neka su T_1 i T_2 proizvoljne točke iz Σ promatrane krivulje $\mathcal{K}$ na udaljenosti v_1 i v_2 od pravca p. Neka je $T \in \Sigma$ točka koja pripada $\mathcal{K}$ i nalazi se na pravcu PN gdje je točka P polovište dužine $\overline{T_1T_2}$, a N nožište okomice iz P na pravac p (slika 3). Označimo s N_1 i N_2 nožišta okomica iz T_1 i T_2 na p. Tada je $\overline{PN}$ srednjica trapeza $T_1N_1N_2T_2$ pa je $|PN| = \dfrac{v_1+v_2}{2}$. Neka se T nalazi na udaljenosti v od pravca p. Udubljenost krivulje $\mathcal{K}$ određujemo ovisno o tome vrijedi li

$$v < \frac{v_1+v_2}{2} \qquad \text{ili} \qquad v > \frac{v_1+v_2}{2},$$

odnosno nalazi li se točka T ispod ili iznad točke P.



Slika 3.

Označimo $e = |F_1P|, f = |F_2P|$ i nadopunimo trokute $F_1T_2T_1$ i $F_2T_2T_1$ do paralelograma $F_1T_2P_1T_1$ i $F_2T_2P_2T_1$ redom. Točka P je dakle sjecište, odnosno polovište dijagonala u oba paralelograma. Zbog nejednakosti trokuta vrijedi

$$\begin{aligned}|F_1P_1| &< |T_2P_1| + |F_1T_2|,\\ |F_2P_2| &< |T_2P_2| + |F_2T_2|,\end{aligned}$$

odnosno

$$2e < e_1 + e_2, \qquad 2f < f_1 + f_2.$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo $2(e+f) < (e_1+f_1) + (e_2+f_2) = 4a$, odnosno $|F_1P| + |F_2P| < 2a$. Prema tomu, P ne pripada krivulji $\mathcal{K}$. Lako se vidi da je analogan zbroj manji od $2a$ za svaku drugu točku dužine $\overline{PN}$. Naime, neka je

$R \in \overline{PN}$, $R \neq P$. Tada je $|F_1R| < |F_1P|$ i $|F_2R| < |F_2P|$ pa je $|F_1R| + |F_2R| < |F_1P| + |F_2P| < 2a$. Dakle, nijedna se točka dužine $\overline{PN}$ ne nalazi na krivulji $\mathcal{K}$. Prema tomu, točka T se mora nalaziti iznad točke P, odnosno vrijedi $v > \dfrac{v_1 + v_2}{2}$. Drugim riječima, krivulja je u Σ udubljena prema gore.

Konačno zaključujemo da ni krivulje na slikama 1c) i 1f) ne odgovaraju krivulji $\mathcal{K}$. Vidimo da krivulja sa slike 1d) ima sva otkrivena svojstva, i podsjeća nas na elipsu.

Za kraj, napomenimo da s pomoću koordinatnog prikaza krivulje $\mathcal{K}$, koji je dan s (1), možemo nešto jednostavnije otkriti njezina, dosad proučavana, svojstva. Ako točka s koordinatama (x, y) pripada krivulji $\mathcal{K}$, onda se lako provjeri da i točke s koordinatama $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ zadovoljavaju jednadžbu krivulje pa je $\mathcal{K}$ simetrična s obzirom na koordinatne osi. Točke krivulje $\mathcal{K}$ koje se nalaze na pravcu F_1F_2 imaju drugu koordinatu nula pa lako izračunamo da su jedine takve točke $(-a, 0)$ i $(a, 0)$. Analogno, točke krivulje koje leže na simetrali dužine F_1F_2 su točke s prvom koordinatom nula, odnosno točke $(0, b)$ i $(0, -b)$.

Iz jednadžbe (1) zaključujemo da dio krivulje $\mathcal{K}$, koji pripada prvom kvadrantu koordinatnog sustava, možemo poistovjetiti s grafom funkcije $f : \langle 0, a\rangle \to \mathbf{R}$ definirane sa

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{4}$$

S obzirom na to da točke krivulje u prvom kvadrantu pripadaju grafu funkcije, ne postoje točke krivulje u tom kvadrantu koje su jednako udaljene od y-osi. Iz definicije funkcije f očito je da kako se x povećava, y se smanjuje, odnosno vidimo da je f strogo padajuća funkcija na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Dakle, u prvom kvadrantu nemamo ni dvije točke krivulje $\mathcal{K}$ koje su jednako udaljene od x-osi.

Provjerit ćemo i je li funkcija definirana sa (4) konveksna ili konkavna na $\langle 0, a\rangle$. Najlakše to možemo provjeriti računajući drugu derivaciju funkcije. Konkretno vrijedi

$$f''(x) = -\frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dakle, za $x \in \langle 0, a\rangle$ imamo $f''(x) < 0$ pa je funkcija f na tom intervalu strogo konkavna, odnosno pripadni dio krivulje $\mathcal{K}$ udubljen je prema gore.

Tu činjenicu možemo provjeriti i bez uporabe derivacija. Neka su zadane točke T_1 i T_2 krivulje $\mathcal{K}$ u prvom kvadrantu s koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Dakle, vrijedi $0 < x_1$, $x_2 < a$. Neka je P polovište dužine $\overline{T_1T_2}$. Tada su koordinate točke P jednake $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Neka je $T = (x_T, y_T)$ točka krivulje $\mathcal{K}$ iz prvog kvadranta kojoj je prva koordinata jednaka $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{y_1 + y_2}{2} < y_T \\
\iff &\frac{1}{2}\left(b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} + b\sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}}\right) \\
&\qquad < b\sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2} \\
\iff &\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_2^2} < \sqrt{4a^2 - (x_1 + x_2)^2} \\
\iff &\left(\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_2^2}\right)^2 < 4a^2 - (x_1 + x_2)^2 \\
\iff &\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2)} < a^2 - x_1x_2 \\
\iff &(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2) < (a^2 - x_1x_2)^2 \\
\iff &x_1^2 + x_2^2 > 2x_1x_2 \\
\iff &(x_1 + x_2)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost je naravno točna jer su točke T_1 i T_2 različite. Prema tome je i $y_T > \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, odnosno točka T se nalazi iznad polovišta dužine $\overline{T_1T_2}$.

LITERATURA

1/ I. Laštro: *Geometrijska mjesta točaka*, Diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2014.

2/ Š. Šuljić: *Čunjosječnice*, Matematika i škola, 11, 2001.

3/ *Elipsa*, `http://www.normala.hr/interaktivna matematika/elipsa/`