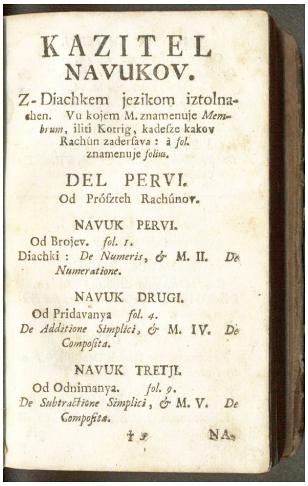
Kako je Šilobod
radio provjeru zadataka zbrajanja

Valentina Pavetić, Zlatar
Predrag Vuković, Varaždin

Zbog svakodnevnih potreba tadašnjeg stanovništva, ali i u svrhu kvalitetnijeg poučavanja nastave matematike, istaknuti pisac, pjesnik, župnik i učitelj Mijo Šilobod Bolšić (1724. – 1787.) napisao je 1758. godine prvi matematički priručnik na hrvatskom jeziku s kajkavskom osnovicom, ***Arithmetiku Horvatszku***, tiskanu u Zagrebu. O njoj je već bilo riječi u MiŠ-u. U članku su ukratko prikazani neki metodički pristupi u aritmetici i pristup pisanom zbrajanju, te načinu provjere tog zbrajanja.



KAZITEL
NAVUKOV.
Z-Diachkem jezikom iztolnachen. Vu kojem M. znamenuje *Membrum*, iliti Kotrig, kadeſze kakov Rachún zaderſava : à *fol.* znamenuje *folium.*

DEL PERVI.
Od Próſzteh Rachúnov.

NAVUK PERVI.
Od Brojev. *fol. 1.*
Diachki : *De Numeris*, & M. II. *De Numeratione.*

NAVUK DRUGI.
Od Pridavanya *fol. 4.*
De Additione Simplici, & M. IV. *De Compoſita.*

NAVUK TRETJI.
Od Odnimanya. *fol. 9.*
De Subtractione Simplici, & M. V. *De Compoſita.*

NA-

kazalo *Arithmetike Horvatszke*

Arithmetika Horvatszka 1758.

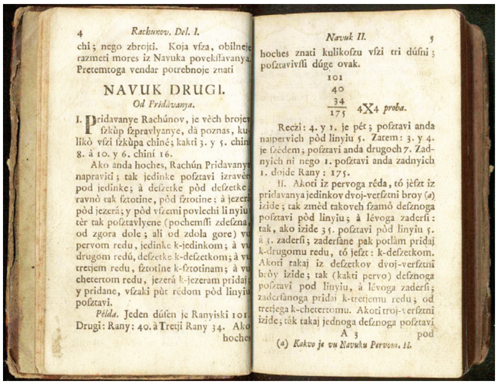
Arithmetika Horvatszka najvažniji je matematički priručnik na kajkavskom narječju i prva je matematička knjiga na hrvatskom jeziku. Knjiga ukupno ima 434 stranice, a sastoji se od predgovora sa sadržajem, četiri dijela različitog matematičkog sadržaja te priloga na kraju. Svaku obradu određenog matematičkog sadržaja prati velik broj riješenih primjera, odnosno *peldi*, koje Šilobod uzima iz svakodnevnog života kako bi na što lakši način približio sadržaj puku.

Metodički elementi *Arithmetike Horvatszke*

Ovim svojim djelom je Šilobod utjecao na razvoj matematičkog obrazovanja u Hrvatskoj, što je vidljivo u samom odabiru aritmetičkih sadržaja, metodičkoj interpretaciji pojedinog matematičkog sadržaja, kao i u korištenju različitih matematičkih načela. *Peldama* detaljno objašnjava sam postupak rješavanja matematičkog problema te prikazuje pravilan zapis simbolima, ali i riječima. Osim postupka i zapisa, Šilobod objašnjava i postupak provjeravanja točnosti računa, što se rijetko može naći u suvremenim udžbenicima i zbirkama zadataka. U mnogim zadatcima Šilobod daje čitatelju mogućnost zornog i postupnog praćenja tijeka rješavanja zadatka. U nastojanju da zadatci budu čitatelju bliži, poznatiji i logičniji Šilobod često navodi primjere u kojima se pojavljuju ljudi iz svakodnevnice, čak i različita narodna imena te imena likova iz priča. U velikom broju primjera vidljivo je korištenje načela zornosti koje je najpotrebnije u početnom učenju matematike. Primjeri su raznovrsni, jasni i motivirajući, te pokazuju Šilobodovu kreativnost što cijeloj računici daje životnost, čini je raznolikom i svakome bliskom. Šilobod se svojim čitateljima kroz cijelu knjigu obraća u prvom licu, što olakšava čitanje i samo razumijevanje teksta, te stvara prisan odnos autora i čitatelja. Ova računica namijenjena je svakomu, neovisno o staležu, zanimanju i prethodnom znanju. U nastavku članka slijedi prikaz zbrajanja iz Šilobodove knjige te kako je Šilobod radio provjeru računske operacije zbrajanja.

Zbrajanje

Na samom početku obrade ove računske operacije, Šilobod nam prvo objašnjava zbrajanje. Zbrajanje je "spravljanje" više brojeva zajedno, a potom navodi nekoliko jednostavnih primjera (3 i 5 čine 8, 10 i 6 čine 16). Nakon jednostavnih primjera, objašnjava sam postupak pisanog zbrajanja te ujedno naglašava važnost pravilnog potpisivanja te postavljanje linije koja zamjenjuje znak "=", a također i redoslijed postupka pisanog zbrajanja znamenaka zdesna ulijevo, to jest od najmanje mjesne vrijednosti prema većima. Šilobod nam u nastavku daje jasne upute kako jedinice zbrajamo s jedinicama, desetice s deseticama, i tako dalje, te kako moramo odmah pravilno potpisivati. Šilobod u većini zadataka radi provjeru, odnosno pokus točnosti računanja. Ono se izvodi tako da kod svakog pribrojnika zbroji ostatke pri njihovom dijeljenju sa 9. Zbroj tih ostataka mora biti jednak ostatku u rezultatu (vidi [2]). Pogledajmo ovu tvrdnju na jednom od primjera koji se nalaze u Šilobodovoj *Arithmetici*.



4 *Rachunov. Del. I.*

chi; nego zbrojti. Koja vſza, obilneje razmeti mores iz Navuka povekſlavanya. Pretemtoga vendar potrebnoje znati

NAVUK DRUGI.

Od Pridávanya.

I. Pridavanye Rachúnov, je vèch brojev ſzkùp ſzpravlyanye, dà poznas, kulikò vſzi ſzkùpa chiné; kakti 3. y 5. chini 8. à 10. y 6. chiní 16.

Ako ánda hoches, Rachún Pridavanya napraviti; tak jedinke poſztavi izravèn pod jedinke; à deſzetke pòd deſzetke; ravnò tak ſztotine, pòd ſztotine; à jezerá pòd jezerá; y pòd vſzemi povlechi linyiu; tèr tak poſztavlyene (pochemſſi zdeſzna, od zgora dole; ali od zdola gore) vu pervom redu, jedinke k-jedinkom; à vu drugom redú, deſzetke k-deſzetkom; à vu tretjem redu, ſztotine k-ſztotinam; à vu chetertom redu, jezerá k-jezeram pridaj; y pridane, vſzaki pùt rédom pòd linyiu poſztavi.

Példa. Jeden dúſen je Ranyiski 101. Drugi: Rany: 40. à Tretji Rany 34. Ako hoches

Navuk II. 5

hoches znati kulikoſzu vſzi tri dúſni; poſztavivſſi dúge ovak.

$$
\begin{array}{r}
101 \\
40 \\
34 \\
\hline
175
\end{array}
\quad 4\mathrm{X}4 \textit{ proba.}
$$

Reczi: 4. y 1. je pét; poſztavi anda najpervich pòd linyiu 5. Zatem: 3. y 4. je ſzèdem; poſztavi anda drugoch 7. Zadnyich ni nego 1. poſztavi anda zadnyich 1. dojde Rany: 175.

II. Akoti iz pervoga réda, tó jèſzt iz pridavanya jedinkov dvoj-verſztni broy (*a*) izide; tak zmèd takoveh ſzamò deſznoga poſztavi pòd linyiu; à lévoga zaderſi: tak, ako izide 35. poſztavi pòd linyiu 5. à 3. zaderſi; zaderſane pak potlàm pridaj k-drugomu redu, tó jeſzt: k-deſzetkom. Akoti takaj iz deſzetkov dvoj-verſztni bròy izide; tak (kakti pervo) deſznoga poſztavi pod linyiu, à lévoga zaderſi; zaderſanoga pridai k-tretjemu redu; od tretjega k-chetertomu. Akoti troj-verſztni izide; ták takaj jednoga deſznoga poſztavi

A 3 pod

(*a*) *Kakvo je vu Navuku Pervom. II.*

prvi primjer zbrajanja

Primjer: *Jedan čovjek je dužan 101 ranjskih novčića. Drugi je dužan 40, a treći 34 ranjska novčića. Ako želiš saznati koliko su sva trojica zajedno dužni; postavi dugove ovako.*

$$
\begin{array}{r}
101 \\
40 \\
34 \\
\hline
175
\end{array}
\qquad 4\mathrm{X}4 \text{ provjera.}
$$

Govori: 4 i 1 je 5; prvo pod liniju zapiši 5. Zatim: 3 i 4 je sedam; zatim na drugo mjesto pod liniju zapiši 7. Na kraju je 1, te zapiši pod liniju 1. Ukupno dođe 175 ranjskih novčića.

Vidljivo je kako u ovom primjeru koristi novac kao kontekst kako bi si čitatelj mogao što zornije predočiti računsku radnju i problemsku situaciju. Tekst zadatka nam govori o trojici muškaraca te iznosu njihovog dugovanja. Ono što je najzanimljivije jest sam način provjere točnosti. Šilobod objašnjava da moramo zbrojiti sve znamenke koje se nalaze "iznad crte" i od tog zbroja oduzimati broj 9 koliko god puta je to moguće. Ono što nam ostane na kraju, govori nam da postavimo pokraj X. Isto tako moramo učiniti i sa znamenkama ispod crte, te ono što nam ostane od oduzimanja zapišemo iza X. Ako se ispred i iza X nalaze jednaki brojevi znači da je račun dobar. Šilobod provjeru doživljava kao važnu etapu rješavanja problemskog zadatka, kao što su zapis i sam način računanja. Pogledajmo to na ovom primjeru.

Prvi pribrojnik nam je 101. Tražimo najveći višekratnik broja 9 manji od 101 te taj broj oduzmemo od prvog pribrojnika. Najveći višekratnik broja 9 manji od 101 je 99 te nam do 101 nedostaje 2.

$$101 = 99 + 2.$$

Tako napravimo i s ostala dva pribrojnika.

$$40 = 36 + 4.$$

$$34 = 27 + 7.$$

Nakon što smo izračunali višekratnike broja 9 te ostatke, sada trebamo te ostatke zbrojiti.

$$2 + 4 + 7 = 13.$$

Od zbroja oduzmemo 9, jer smo koristili višekratnik broja 9 te ispadne:

$$13 - 9 = 4.$$

Nakon što smo provjerili pribrojnike, ostalo nam je samo provjeriti i rezultat zbrajanja. Tražimo najveći višekratnik broja 9 koji je manji od broja 175.

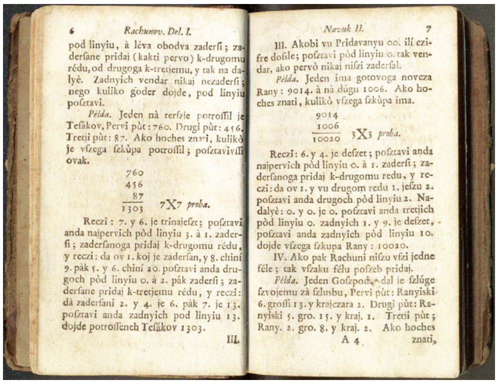
$$175 = 171 + 4.$$

Vidljivo je da je ostatak kod pribrojnika i ostatak kod rezultata jednak, što nam prikazuje da je rezultat zbrajanja točan. Šilobod to označava:

$$4\mathrm{X}4 \text{ provjera.}$$

Ova se provjera bazira na svojstvu djeljivosti brojem 9 te svojstvu djeljivosti zbroja i razlike. U današnjoj nastavi matematike ne koristimo se ovakvom provjerom, iako bi možda nekad bilo dobro upotrijebiti je i osvijestiti si ova pravila (vidi [4]).

Pogledajmo ovaj način provjere kroz još jedan primjer u kojem Šilobod objašnjava zbrajanje triju pribrojnika u kojem zbroj znamenaka na pojedinom dekadskom mjestu prelazi 9, odnosno kada imamo prijelaz desetice.



6 Rachunov. Del. I.

pod linyiu, à léva obodva zaderſi; zaderſane pridaj (kakti pervo) k-drugomu rédu, od drugoga k-tretjemu, y tak na dalyè. Zadnyich vendar nikaj nezaderſi; nego kuliko goder dojde, pod linyiu poſztavi.

Példa. Jeden nà terſzje potroſſil je Teſákov, Pervi pùt: 760. Drugi pùt: 456. Tretji pùt: 87. Ako hoches znati, kulikò je vſzega ſzkùpa potroſſil; poſztavivſſi ovak.

760
456
87
1303 7X7 *proba.*

Reczi: 7. y 6. je trinajeſzt; poſztavi anda najpervich pòd linyiu 3. à 1. zaderſi; zaderſanoga pridaj k-drugomu rédu, y reczi: da ov 1. koj je zaderſan, y 8. chiní 9. pàk 5. y 6. chiní 20. poſztavi anda drugoch pòd linyiu 0. à 2. pák zaderſi; zaderſane pridaj k-tretjemu rédu, y reczi: dà zaderſani 2. y 4. je 6. pàk 7. je 13. poſztavi anda zadnyich pod linyiu 13. dojde potroſſench Teſákov 1303.

III.

Navuk II. 7

III. Akobi vu Pridavanyu 00. ilí czifre doſle; poſztavi pòd linyiu 0. tak vendar, ako pervò nikaj niſzi zaderſal.

Példa. Jeden ima gotovoga novcza Rany: 9014. à nà dúgu 1006. Ako hoches znati, kulikò vſzega ſzkùpa ima.

9014
1006
10020 3X3 *proba.*

Reczi: 6. y 4. je deſzet; poſztavi anda najpervich pòd linyiu 0. à 1. zaderſi; zaderſanoga pridaj k-drugomu redu, y reczi: da ov 1. y vu drugom redu 1. jeſzu 2. poſztavi anda drugoch pòd linyiu 2. Nadalyè: 0. y 0. je 0. poſztavi anda tretjich pòd linyiu 0. zadnyich 1. y 9. je deſzet, poſztavi anda zadnyich pòd linyiu 10. dojde vſzega ſzkupa Rany: 10020.

IV. Ako pak Rachuni niſzu vſzi jedne féle; tak vſzaku félu poſzeb pridaj.

Példa. Jeden Goſzpodar dal je ſzlúge ſzvojemu zà ſzlusbu, Pervi pùt: Ranyiski 6. groſſi 13. y krajczara 2. Drugi pùt: Ranyiski 5. gro. 15. y kraj. 1. Tretji pùt; Rany. 2. gro. 8. y kraj. 2. Ako hoches

A 4 znati,

drugi primjer zbrajanja

Primjer: *Jedan (čovjek) je na vinogradu prvi puta potrošio 760 kolaca. Drugi puta je potrošio 465, a treći 87. Ako želiš znati koliko je zajedno potrošio, zapiši ovako:*

$$\begin{array}{r} 760 \\ 456 \\ 87 \\ \hline 1303 \end{array} \qquad 7\mathrm{X}7 \text{ provjera.}$$

Govori: 7 i 6 je trinaest; prvo pod liniju zapiši 3, a 1 zapamti. Zapamćeni broj pridodaj drugom retku i reci: da ovaj 1 koji je zapamćen i 8 čine 9 te sa 5 i 6 čine 20. Drugi puta zapiši pod liniju 0, a 2 zapamti. Zapamćeni broj pridodaj trećem retku i govori: zapamćeni broj 2 i 4 daju 6 i 7 je 13. Na kraju postavi pod liniju 13. Ukupno potrošenih kolaca je 1303.

Vidljivo je kako Šilobod objašnjava prijelaz desetice nekoliko puta (kod jedinica, desetica i stotica) u ovom primjeru. Na jednostavan i razumljiv način objašnjava kako se jedinice potpišu, a znamenku desetica pribroji većoj mjesnoj vrijednosti. Kao i u svakom primjeru autor ponovno koristi inspiraciju iz svakodnevnog života. Ovaj primjer govori o muškarcu koji je u svom vinogradu koristio kolce. Na kraju ovog primjera slijedi i provjera.

Moramo tražiti najveći višekratnik broja 9 koji je manji od svakog od triju pribrojnika, to jest gledamo ostatak pri dijeljenju sa 9.

$$760 = 756 + 4$$
$$456 = 450 + 6$$
$$87 = 81 + 6$$
$$16 - 9 = 7, \text{ ostatak je } 7$$

Pronađimo najveći višekratnik broja 9 koji je manji od rezultata, odnosno 1303.

$$1303 = 1296 + 7.$$

Ostatak kod pribrojnika jednak je ostatku kod rezultata, što nam govori da je rezultat zbrajanja točan.

Objašnjenje za Šilobodovu provjeru zbrajanja može se pronaći u [3], propozicija 2.2: ako dva cijela broja a i b prilikom dijeljenja sa 9 daju ostatak r odnosno s (kraće zapisano $a \equiv r \pmod 9$ i $b \equiv s \pmod 9$), onda $a+b$ prilikom dijeljenja sa 9 daje ostatak $r+s$ (ili $a+b \equiv r+s \pmod 9$). Također u [3] se nalazi sljedeća propozicija 2.3: neka je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima zadan formulom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Ako je $a \equiv r \pmod 9$, onda je $f(a) \equiv f(r) \pmod 9$. Kako bi se dokazala ispravnost Šilobodove provjere, neka je $a = f(10)$, $b = g(10)$, $c = h(10)$, pri čemu su f, g i h polinomi s cjelobrojnim koeficijentima, te neka vrijedi $a + b = c$. Tada $f(1)$, $g(1)$ i $h(1)$ predstavljaju redom zbroj znamenaka brojeva a, b i c. Budući da vrijedi $10 \equiv 1 \pmod 9$, iz propozicije 2.3 slijedi $a = f(10) \equiv f(1) \pmod 9$, $b = g(10) \equiv g(1) \pmod 9$. Na kraju, propozicija 2.2 nam daje prvo $f(10) + g(10) \equiv f(1) + g(1) \pmod 9$, a zatim i $c = h(10) \equiv f(1) + g(1) \pmod 9$. Ako je $f(1) + g(1)$ ili $h(1)$ ("gornji" i "donji" zbroj znamenaka u pisanom zbrajanju) veći od 9, tada uzimamo ostatak prilikom dijeljenja s brojem 9. Napomenimo da propozicije 2.2 i 2.3 vrijede ako umjesto dva pribrojnika uzimamo više pribrojnika. Na ovaj način je dokazana ispravnost Šilobodova postupka provjere.

LITERATURA

1/ Irena Mišurac-Zorica: *Pedagoška i metodička analiza "Arithmetike Horvatszke" Mihalja Šiloboda* – pogovor uz pretisak knjige: Arithmetika Horvatzka, Samoborski muzej, 2008.

2/ Zvonimir Jakobović: *Računski nazivi i računanje u Šilobodovoj "Arithmetiki Horvatszkoj"* – pogovor uz pretisak knjige: Arithmetika Horvatszka, Samoborski muzej, 2008.

3/ Andrej Dujella: *Uvod u teoriju brojeva,* skripta, `web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

4/ Valentina Pavetić: *Računski zadatci u prvoj hrvatskoj računici Arithmetika Horvatszka iz 1758.* – diplomski rad, Učiteljski fakultet Zagreb, 2014.

5/ Irena Mišurac-Zorica: *Doprinos Mije Šiloboda Bolšića metodici nastave matematike u Hrvatskoj* – magistarski rad, Zagreb: Filozofski fakultet.