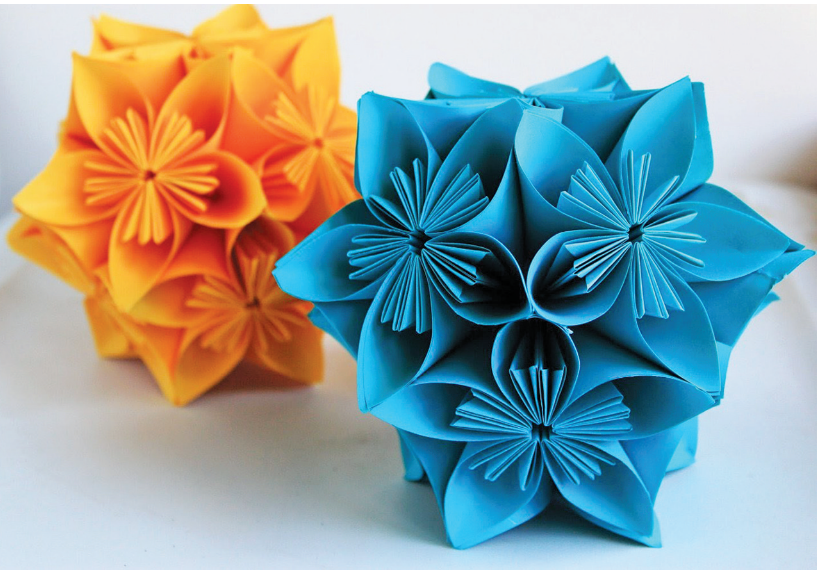
Matematika savijanja papira:

korak dalje



Sandra Gračan, Zagreb

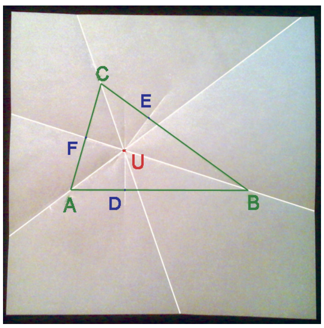
Izrađujući raznovrsne oblike od papira, gotovo nitko i ne pomišlja na matematiku koja se krije iza tog, mnogima zabavnog hobija. U prošlom broju MiŠ-a otkrili smo tek osnovne geometrijske pojmove koji se u nastavi matematike mogu vrlo zorno objasniti uz pomoć origamija, a sada pročitajte kako se savijanjem papira mogu izvesti i malo složenije vježbe.

Nakon usvajanja osnovnih ideja i pojmova, nije teško napraviti korak dalje k malo složenijim zadatcima i obraditi razne geometrijske likove i njihova svojstva. Pritom se od učenika očekuje da mogu objasniti zašto određene origami konstrukcije vrijede, odnosno da znaju koji su aksiom u svakom pojedinom koraku upotrijebili.

S obzirom na veći broj pregiba, u nekima se od sljedećih vježbi početni lik ne treba odrediti savijanjem pregiba, već ga je bolje nacrtati.

1. Trokut. Središte trokutu upisane kružnice.

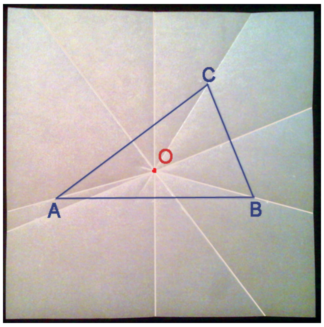
Savijte tri neparalelna pregiba koji se međusobno sijeku. Dobivate trokut. Označite mu vrhove s A, B i C. Ili: na papiru nacrtajte trokut ABC. Zatim savijanjem odredite sve tri simetrale kutova tog trokuta. Sijeku li se one u istoj točki? Označite tu točku slovom U i zatim savijte redom okomice na stranice trokuta tako da prolaze točkom U. Savijanjem usporedite duljine tako dobivenih dužina $\overline{UD}$, $\overline{UE}$ i $\overline{UF}$. Što možete zaključiti?



središte trokutu upisane kružnice

2. Središte trokutu opisane kružnice

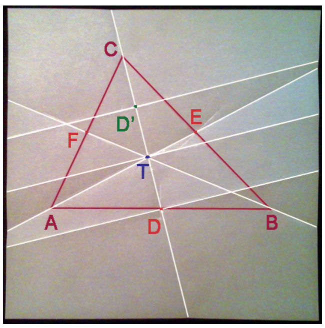
Nacrtajte trokut ABC pa savijanjem odredite simetrale svih triju stranica tog trokuta. Kako se naziva njihov zajednički presjek? Označite ga slovom O pa savijte redom pravce koji prolaze tom točkom i vrhovima trokuta. Što je osnosimetrična slika dužine $\overline{OB}$ s obzirom na simetralu stranice $\overline{AB}$? Što možete zaključiti?



središte trokutu opisane kružnice

3. Težište trokuta

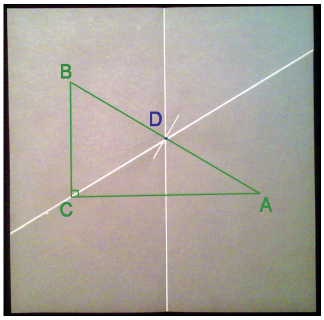
Najprije savijanjem odredite polovišta D, E i F svih triju stranica zadanog trokuta ABC. Zatim savijte pregibe koji prolaze polovištima stranica i nasuprotnim vrhovima trokuta. Kako se zove točka u kojoj se ti pravci sijeku? Savijte okomicu na težišnicu $\overline{CD}$ koja prolazi težištem T. Zatim odredite simetralu dužine $\overline{CT}$, odnosno njezino polovište D'. Usporedite duljine dužina $\overline{CD'}$, $\overline{D'T}$ i $\overline{TD}$. Što možete zaključiti o položaju točke T na svakoj od triju težišnica?



težište trokuta

4. Polovište hipotenuze pravokutnog trokuta

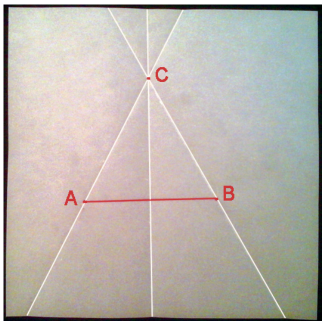
Nacrtajte pravokutni trokut ABC. Savijanjem odredite polovište D hipotenuze $\overline{AB}$. Savijte pregib koji prolazi točkama C i D. Usporedite duljine dužina $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$ presavijanjem simetrale kuta $\sphericalangle BDC$. Što je osnosimetrična slika dužine $\overline{CD}$ u odnosu na tu simetralu?



polovište hipotenuze pravokutnog trokuta

5. Jednakokračan trokut

Savijanje simetrale dužine omogućuje konstrukciju jednakokračnog trokuta. Zašto?
Na papiru nacrtajte osnovicu trokuta $\overline{AB}$, a zatim savijanjem načinite njezinu simetralu. Razmotajte papir. Na simetrali po volji odaberite točku C pa savijte pregibe koji prolaze točkom C i vrhovima A i B. Odredili ste jednakokračan trokut.

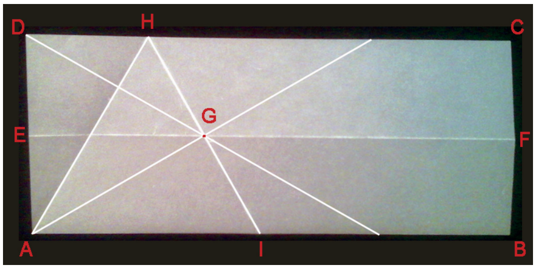


jednakokračan trokut

Učenicima će se svidjeti očiglednost tvrdnje da su kutovi pri osnovici jednakokračnog trokuta sukladni: samo treba presaviti trokut po simetrali osnovice i "vidjeti" da se kutovi poklapaju. Pokušaju li to isto načiniti s raznostraničnim trokutom, lako će uočiti da jedino simetrala osnovice jednakokračnog trokuta prolazi vrhom nasuprot osnovici.

6. Jednakostraničan trokut

Presavijte pravokutni komad papira (pravokutnik $ABCD$) vodoravno na pola, razmotajte, a zatim načinite pregib koji prolazi donjim lijevim vrhom A, a vrh D preslikava u točku G na pregibu EF. Dobiveni pregib siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki H, a sa stranicom $\overline{AB}$ zatvara kut od 60°.

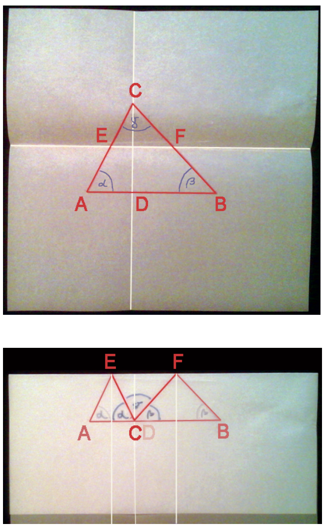


jednakostraničan trokut

Savijte pregib GH. Taj pregib siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki I. Lako se pokaže da je $|IH| = |HA| = |AI|$, iz čega slijedi da je trokut AIH jednakostraničan. Uočite da je pravi kut $\sphericalangle DAB$ dvama pregibima podijeljen na tri jednaka dijela te da je i trokut AGD također jednakostraničan.

7. Zbroj kutova u trokutu je 180°

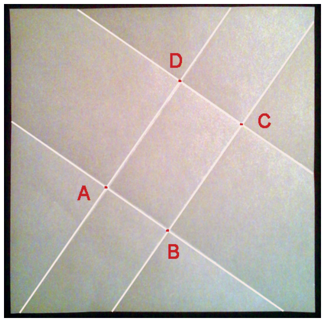
Savijte najprije visinu $\overline{CD}$ zadanog trokuta ABC. Zatim savijte papir tako da vrh C trokuta padne u nožište D visine. U kakvom su odnosu dobivena dužina $\overline{EF}$ i osnovica $\overline{AB}$? A dužine $\overline{AE}$ i $\overline{ED}$ te $\overline{BF}$ i $\overline{FD}$? Nemojte razmotati. Savijte papir tako da vrh A padne u D, a zatim i tako da vrh B padne u D. Je li zbroj kutova α, β i γ ispruženi kut?



zbroj kutova u trokutu

8. Pravokutnik

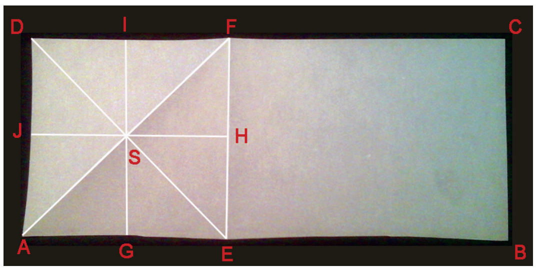
Najprije savijte papir da biste načinili prvi pregib, odnosno pravac, a zatim na njemu odaberite dvije točke A i B koje će predstavljati dva susjedna vrha pravokutnika. U tim vrhovima zatim savijte dvije okomice na pravac AB, pa na okomici kroz B odaberite treći vrh pravokutnika, odnosno točku C. Kroz tu točku savijte okomicu na pravac BC. Četvrti vrh D pravokutnika $ABCD$ bit će presjek dvaju okomitih pregiba: CD i AD.



pravokutnik

9. Kvadrat

S obzirom na to da je papir najčešće pravokutnog oblika, evo kako ćete savijanjem od pravokutnika jednostavno načiniti kvadrat. Najprije savijete simetralu jednog njegovog pravog kuta. Pritom se vrh D preslika u točku E na stranici $\overline{AB}$. Zatim savijte okomicu na stranicu $\overline{CD}$ koja prolazi točkom E. Pravokutnik $EBCF$ možete odrezati po pregibu $\overline{EF}$ i ostat će vam komad papira kvadratnog oblika.



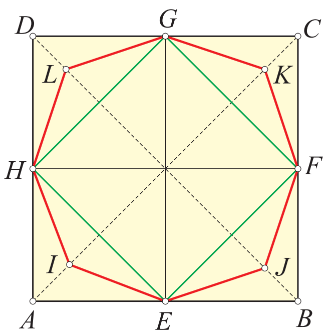
kvadrat

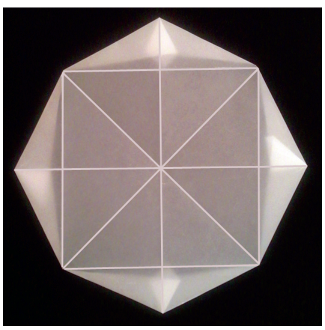
Kvadrat je osnosimetričan lik s četirima osima simetrije i savijanjem možete proučiti sva ta svojstva. Najprije odredite polovišta njegovih stranica, a zatim simetrale pravih kutova. Učenike možete primjerice pitati što je osnosimetrična slika točaka D, J

i F u odnosu na $\overline{GI}$, ili kuta $\sphericalangle HSF$ s obzirom na $\overline{AF}$, ili pak u što se preslikava vrh E savijanjem po GI itd.

10. Osmerokut

Savijte kvadrat $ABCD$ okomito, a zatim i vodoravno po sredini. Odredili ste redom polovišta E, F, G i H njegovih stranica. Kad razmotate papir, vidjet ćete dvije srednjice, $\overline{EG}$ i $\overline{HF}$. Zatim savijte redom pregibe $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ i $\overline{HE}$ da biste dobili kvadrat $EFGH$ upisan kvadratu $ABCD$ pa odredite polovišta njegovih stranica. Dobiveni pregibi bit će ujedno i dijagonale kvadrata $ABCD$. Razmotajte. Uočite da se sada vide dijagonale svih četiriju malih kvadrata na koje dvije srednjice dijele kvadrat $ABCD$, kao i njihova središta. Načinite pregib kojim će vrh A kvadrata pasti u njemu najbliže središte. Dobiveni pregib siječe se s dijagonalom kvadrata $ABCD$ u točki I. Isto ponovite za preostale vrhove i presječne točke označite redom sa J, K i L. Zašto je $IEJFKGLH$ pravilan osmerokut?





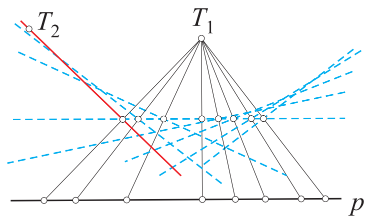
osmerokut

* * *

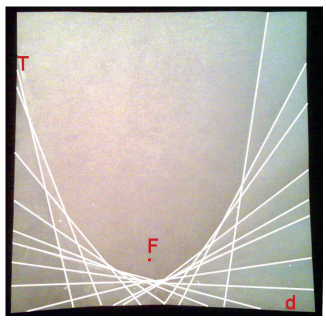
S pomoću savijanja papira mogu se proučavati i neka puno složenija matematička svojstva. Pretražite li internet, pronaći ćete razne ideje za vježbe koje biste mogli izvesti primjerice u razredu sa srednjoškolcima. Ovdje su, za kraj, navedena samo dva primjera.

11. Parabola

Prisjetimo se najprije aksioma 5: Ako su zadane dvije točke T_1 i T_2, te pravac p, moguće je saviti pregib koji će točku T_1 smjestiti na pravac p i prolaziti točkom T_2. Pregib koji se konstruira tim savijanjem zapravo predstavlja tangentu na parabolu s fokusom u točki T_1 i direktrisom p. Zašto?



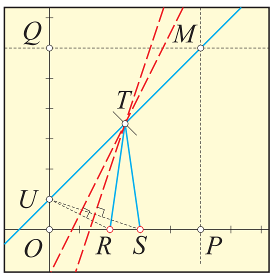
Odabiremo li pak za T_2 redom različite točke, savijanjem prema aksiomu 5 dobivamo niz tangenata koje će ocrtavati parabolu (pogledajte sliku).



parabola

Aksiom 5 može se upotrijebiti pri **rješavanju kvadratne jednadžbe** s pomoću savijanja papira. Evo kako.

Neka je zadana kvadratna jednadžba oblika $x^2 - px + q = 0$, gdje su p i q cijeli brojevi. Uzmimo pravokutni komad papira i savijmo dva međusobno okomita pravca koji će predstavljati koordinatne osi koje se sijeku u točki O. Uzastopnim presavijanjem mogli bismo odrediti jednako razmaknute točke na obje osi, no bit će preglednije ako se na osi ucrtaju jedinice. Na osi x odredimo točku P tako da je $|OP| = p$, a na osi y točku Q tako da je $|OQ| = q$. Savijmo okomicu na os x kroz točku P i okomicu na os y kroz točku Q. Ta se dva pregiba sijeku u točki M. Neka je U točka na osi y takva da je $|OU| = 1$. Savijmo pregib kroz točke M i U. Savijanjem odredimo polovište dužine UM i označimo ga sa T.



rješavanje kvadratne jednadžbe

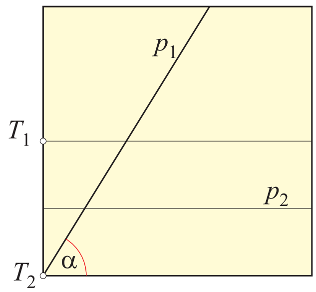
Točka U može se preslikati na os x savijanjem pregiba koji prolazi točkom T (prema aksiomu 5). Uočite da taj pregib nije jedinstven, odnosno da u aksiomu 5 mogu postojati dva rješenja. Ako jednadžba $x^2 - px + q = 0$ ima dva realna i različita rješenja, onda će na osi x postojati dvije različite slike točke U. Ako su to točke R i S, onda $|OR|$ i $|OS|$ predstavljaju rješenja kvadratne jednadžbe i po iznosu i po predznaku.

Na slici je prikazan postupak za jednadžbu $x^2 - 5x + 6 = 0$. Uočite da $|OR| = 2$ i $|OS| = 3$ predstavljaju njezina rješenja. Točke Q, U, R i S leže na jednoj kružnici.

12. Trisekcija kuta

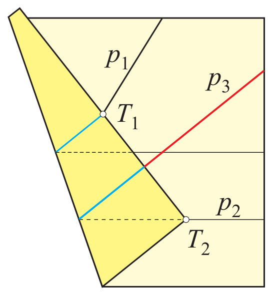
Za kraj pogledajmo kako se savijanjem papira rješava problem koji klasičnom metodom, odnosno konstrukcijom s pomoću ravnala i šestara nije moguće riješiti. Riječ je o **trisekciji kuta**. Slijedite redom upute.

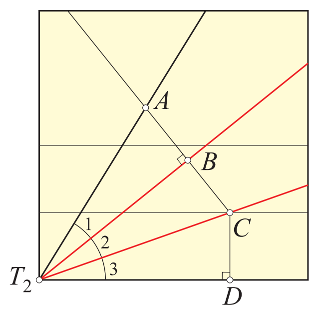
Uzmite list papira u obliku kvadrata. Savijte pregib koji prolazi donjim lijevim vrhom kvadrata i označite ga s p_1. Na taj ste način odredili kut α koji zatvaraju donja stranica kvadrata i pregib p_1. Da kasnije ne biste imali problema s "ispadanjem" s papira, neka taj kut bude veći od $45°$. Rastvorite papir.



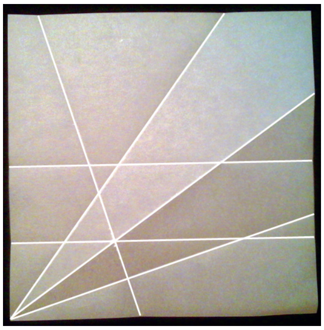
Presavijte papir na četvrtine odozgo prema dolje. Rastvorite. Neka je p_2 pregib udaljen za $\frac{1}{4}$ od donje stranice kvadrata. Označite s T_1 točku u kojoj se sijeku lijeva stranica kvadrata i pregib po sredini kvadrata (onaj na $\frac{1}{2}$ udaljenosti od stranica), a s T_2 vrh kuta α. Izvedite **aksiom 6**: Ako su zadane dvije točke T_1 i T_2 i dva pravca p_1 i p_2, moguće je saviti pregib koji će točku T_1 smjestiti na p_1, a T_2 na p_2. Nemojte rastvoriti papir.

Produljite presavijeni dio pravca p_2 do desne stranice kvadrata savijanjem novog pregiba p_3 (vidi sliku). Rastvorite. Produljite pregib p_3 do vrha T_2.





Pregib p_3 s donjom stranicom kvadrata zatvara kut koji ima mjeru $\frac{2}{3}$ od mjere kuta α. Koristeći se aksiomom 3 savijte donju stranicu papira tako da ona padne na p_3 i na taj način dobivate pregib p_4, odnosno kut α je podijeljen pregibima p_3 i p_4 na tri jednaka dijela.



trisekcija kuta

* * *

Ovi su primjeri zagrebli samo vrh ledene sante zvane "matematika savijanja papira", a cilj ovog teksta bio je navesti neke osnovne ideje i pokazati mogućnosti primjene origamija u nastavi. I u Panoptikumu ovog broja Miš-a prikazan je jedan način rada, odnosno niz savijanja papira kružnog oblika pogodan za brzo ponavljanje brojnih geometrijskih pojmova vezanih uz krug i kružnicu, pogledajte.

LITERATURA

1/ Alton T. Olson: *Mathematics Through Paper Folding*, University of Alberta Edmonton, Alberta, `http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/paperfolding.pdf`

2/ Jaema L. Krier: *Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite*, `http://math.uttyl.edu/nathan/classes/senior-seminar/JaemaKrier.pdf`

3/ Lance Coad: *Paper Folding in the Middle School Classroom and Beyond* `http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ743584.pdf`

4/ Department of Education and Training, Queensland Government: *Geometry by paper folding – Step-by-step guide*, `http://www.gympcentss.eq.edu.au/classwork/cs27/pdf/Week7/math/GeomPaperFold.pdf`

Može se bez pretjerivanja reći da je origami sve samo ne trivijalna zabava. To je bogato matematičko područje koje je učenicima lako dostupno i koje ih upoznaje s geometrijskim idejama "izvan okvira" – na jedan relativno nov, zabavan i pristupačan način.

Papirnati cvijetak s naslovne slike, korak po korak