Slikopričom do rješenja

Vesna Skočir, Zagreb

Ma što učili, važno je razumijevanje. Razumjeti znači vidjeti jednu stvar u kontekstu nečeg drugog.

Da bismo razumjeli, treba razmišljati. A razmišljanje, kako kaže Susan Greenfield[1] ima slijed koraka: početak, sredinu i kraj. To je ujedno vremenski slijed uzroka i posljedica. Ako postoji problem koji želimo riješiti, matematički ili neki drugi, o njemu treba razmišljati tako dugo dok nismo u stanju mentalnim sredstvima ili slikama ispričati priču problema od početka do kraja. Ta priča uključuje sve uvjete, moguća ograničenja, kao i cilj do kojeg želimo doći. Da bismo mogli ispričati priču, svi ovi elementi moraju biti u domeni našeg iskustva. No to je tek početak nakon kojega se ima smisla upustiti u avanturu rješavanja problema. Naime, ima se smisla baviti samo onim problemima koje istinski razumijemo.

Put od razumijevanja problema do nalaženja njegova rješenja druga je priča. To je kreativni i razigrani čin asocijacija koje mogu biti vođene čistom intuicijom, iskustvom i, naravno, poznavanjem različitih strategija za rješavanje problemskih situacija. Pričanje ove priče možda neće ići glatko, pogotovo ako je problem težak i ako se sa sličnim problemima nismo susreli ranije[2]. Priča nalaženja rješenja prirodni je nastavak priče koja opisuje (postavlja) problem. Stoga je jako važno na koji smo način ispričali priču problema: s pomoću znakova jezika (govora ili zapisanih riječi), grafičkim prikazima ili matematičkim formulama.

Budući da nam je govorni jezik najbliži, u tom ćemo jeziku problemsku situaciju najlakše prikazati. Riječi, izgovorene ili napisane na papiru ili ekranu, su statične. Kada ih slušamo ili se udubljujemo u čitanje, mi ih na neki način pokrećemo; oživljujemo. Govorni nam jezik pomaže u logičkom zaključivanju

[1] S predavanja koja je Susan Greenfield, redovna profesorica na Odsjeku za farmakologiju u Oxfordu, vodeća istraživačica na području istraživanja fizičke osnove svjesnosti i Alzheimerove te Parkinsonove bolesti, održala u Zagrebu 2013. godine na Međunarodnoj konferenciji o suvremenom obrazovanju (organizacija IWP Zagreb).

[2] Ako smo primjerice vidjeli kako Pitagorin poučak "djeluje" na pravokutni trokut, istu ćemo formulu, vjerojatno, upotrijebiti i kod drugog pravokutnog trokuta. Za očekivati je da će nam svaki ponovni "susret" s pravokutnim trokutima biti lakši. Ako je pred nama zadatak posve sličan jednome od onih koje smo već ranije uspješno savladali (riješili), onda možemo govoriti samo o rješavanju zadatka, ali se ne smijemo zavaravati i govoriti o problemskom zadatku, jer on za nas više nije problem. O problemu govorimo onda kad postoji cilj do kojeg želimo doći, ali put do toga cilja nije odmah dokučiv.

i omogućuje da lakše povežemo elemente problema. Kod jednostavnijih problemskih zadataka taj će jezik biti dovoljan da ispričamo i postupak nalaženja rješenja.

Prikaz problema govornim jezikom ponekad se uz neznatne intervencije jednostavno pretoči u matematički: tek jedna ili dvije oznake i priča o problemu postaje priča o rješenju. S vremenom pretakanje iz govornog jezika u matematički postaje prirodno, a različite postupke, primjerice one kojima dolazimo do rješenja linearne jednadžbe, ili one kojima nalazimo ekstremne vrijednosti neke funkcije, doživljavamo kao apstraktne "alate" za rješavanje određene klase problemskih zadataka. Služimo li se pojedinim alatom češće, spretnije ćemo njime baratati. Brže ćemo doći do rješenja, a pogrešaka će biti manje. I što je osobito važno, prepoznat ćemo u kojoj situaciji koji alat treba primijeniti. Pritom je nužno razlikovati problemske od tzv. šablonskih zadataka. Šablonski nas zadatci mogu samo naučiti rukovati alatom. Problemski zadatci omogućuju da alatima ovladamo u potpunosti: da se znamo njima služiti, ali i da znamo kada koji alat upotrijebiti. Ostati na nivou šablonskih zadataka znači odreći se samostalnosti u rješavanju problemskih zadataka, ustvari se odreći vlastitog rasta, usavršavanja. Ako tako razmišljamo, onda vrijeme koje potrošimo na rješavanje šablonskih zadataka nije dobro utrošeno vrijeme – neće biti velika pomoć u pravim problemskim situacijama, a budući da izostaje dublje razumijevanje, neizbježno ga prati nelagodan osjećaj nesigurnosti.[3]

Kod grafičkog prikaza problema podatci i veze među njima prikazani su s pomoću slika. Slike pomažu da lakše otkrijemo uzorke među podatcima i/ili da naslutimo (ucrtamo) nove veze koje možda među podatcima postoje te potom analizirajući nacrtano dođemo do rješenja. Mnogima će se grafički prikaz više svidjeti jer slike potiču maštu na poseban način. Samo će rijetki, oboružani znanjem i navikli na apstraktno mišljenje, rečenice, uvjete i ograničenja problemske situacije, direktno pretvarati u matematičke formule.

Natjeramo li sami sebe da priču o problemu ispričamo s pomoću različitih simbola: riječima (napisanim ili izgovorenim), slikama ili matematičkim formulama, problemu ćemo prići na različite načine te ćemo dublje promišljati o njemu. Tako stvaramo konceptualni okvir koji omogućuje lakše povezivanje elemenata problema i utiremo put koji će dovesti do rješenja. Pored toga, grafički simboli pomoći će da matematičke alate (formule) "vidimo" na drugi način te da njima bolje i potpunije ovladamo.

Osobito je važna uloga nastavnika pomoći učeniku da osjeti koji mu je od navedenih načina bliži, koji će ga najučinkovitije približiti problemu i konačno pružiti zadovoljstvo da sam ispriča priču rješenja. Za početak se to može postići pomnim odabirom problemskih zadataka kroz koje će nastavnik i učenik zajedno proći na različite načine.

U primjerima/pričama koje slijede i problem i put do cilja ispričani su grafički i matematički. Treba samo slijediti priču. . .

Pogodi moj broj

Smislio sam broj – bacio je udicu Borna prelistavajući bilježnicu koja mu se našla pri ruci. Marina, njegova sestra, laganim pokretima prstiju mijenjala je sadržaj na ekranu tableta ne pokazujući niti najmanju zainteresiranost. Ali Borna je bio siguran da će se njegova sestra upecati, pa nastavi:

Ako se taj broj uveća za 10, onda je polovina trećine tako uvećanoga broja jednaka 10. Koji je to broj?

Marina je već davno prozrela Bornine igrice, stoga, da mu ne da previše gušta, neko vrijeme nije dizala pogled s trepćućih sličica. Ali zagonetka je bila jača. Zamisli da je poznata detektivka koju su pozvali na drugi kraj svijeta da riješi važan slučaj. Više za sebe ponovi činjenice:

Da vidimo što si činio tome broju: pribrojio mu 10, uzeo trećinu zbroja i kada si tu trećinu prepolovio dobio si broj 10.

[3] Ponekad čak i znamo koje matematičke formule treba upotrijebiti, ali budući da ih ne razumijemo, ne znamo kako.

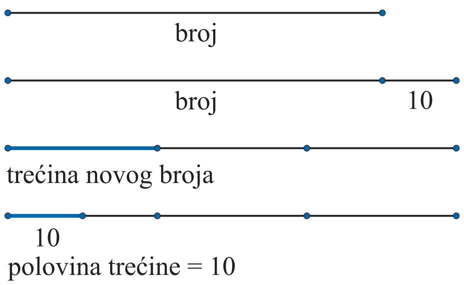
Razmisli još malo, popravi nestašni uvojak i pobjedonosno reče:

Ako sve učinim obrnutim redom, doći ću do tvoga broja!

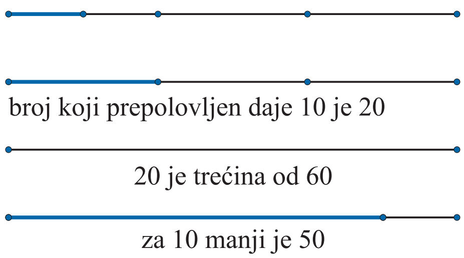
Može li ovom strategijom Marina uspješno riješiti slučaj? Koji je broj smislio Borna?

Rješenje.

Problem se grafički može prikazati na sljedeći način:



Iz ovoga se prikaza slijedeći Marininu strategiju može "vidjeti" rješenje:



Znači, zamišljeni broj je 50. Provjerimo:

$$50+10=60, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 60\right)=10.$$

Marinina strategija bila je dobra. No je li bila nužna? Ustvari ova zagonetka i nije bila tako teška. Malo računanja i upornosti i Marina bi sigurno pogodila traženi broj. Umjesto pogađanja broja i izvršavanja navedenih operacija, nadajući se da će konačni izračun biti jednak 10, domišljato je sve okrenula naglavačke: krenula je redom koji je upravo obrnut stvarnom redoslijedu operacija. Pronašla je koji je broj prethodio broju 10, a potom koji je broj prethodio tome broju i tako sve dok nije došla do zamišljenog broja. Primijenila je postupak koji zovemo **analizom** ili **metodom rješavanja unatrag**[4].

No matematika nudi još jedan "alat" koji može pomoći da do rješenja dođemo bez puno razmišljanja. Zapišemo li problem matematičkim jezikom, bit će jasno da je riječ o postupku za rješavanje linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom.

Zamišljeni nepoznati broj označimo slovom x. Tom broju pribrojimo 10 i dobijemo $x+10$. Trećina tako uvećanog broja je: $\frac{1}{3}(x+10)$, a polovina te trećine $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+10)\right]$. Budući da je dobiveni broj jednak 10, preostaje riješiti jednadžbu:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+10)\right]=10.$$

Dobijemo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(x+10)&=10\\ x+10&=60\\ x&=50.\end{aligned}$$

U posjet dolazi Vinko

Sutra dolazi Vinko. – najavio je tata. Svi su znali koliko ga veseli Vinkov dolazak. To je značilo da će se njih dvojica zatvoriti u sobu i cijelo poslijepodne igrati šah. No tata objavi i to da s Vinkom dolazi i njegov mlađi sin.

Vas dvojica bi se mogli malo zabaviti. – okrene se Marinu. Bila je to više molba nego prijedlog.

[4] Bitna značajka ovog postupka je da pri rješavanju krećemo od konačnog rezultata pa unatrag sve do zadanih pretpostavki. Definirao ga je grčki matematičar Papus (oko 300. godine).

Sigurno neka beba koja još ide u vrtić – frknu Marin sebi u bradu. Pokušao se sjetiti kad je zadnji put vidio sina tatina prijatelja. Uzalud.

Koliko ima godina? – odluči provjeriti.

37. – kratko će otac.

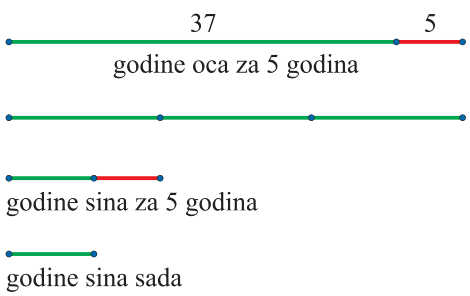
Ma pitam te koliko njegov sin ima godina?! – Marin je bio nestrpljiv.

Pa, to ti je baš zanimljivo. Za 5 će godina Vinko biti tri puta stariji od svoga sina. Što misliš prije koliko je godina bio 5 puta stariji?

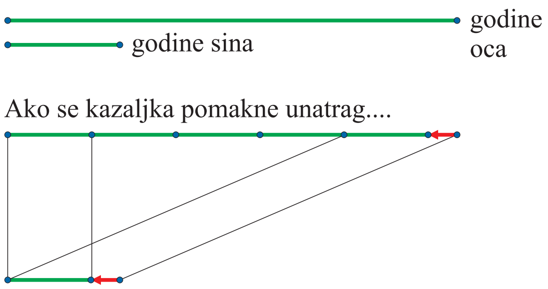
Sad ga još i zafrkava! No Marin se nije dao smesti. Uzeo je papir i olovku i... rješenje je bilo tu.

Rješenje.

Za pet godina Vinko će biti tri puta stariji od sina. Ovu je rečenicu Marin "nacrtao" na sljedeći način:



Za 5 godina otac će imati $37 + 5 = 42$ godine, a sin $42 : 3 = 14$ godina. Dakle, Vinko ima 37, a njegov sin 9 godina. Ako se vrijeme "pomakne" malo unatrag, prema sličnom modelu dobijemo:



Oduzmu li se od Vinkovih godina godine njegova sina, dobiju se četiri jednake vremenske jedinice. Jedna vremenska jedinica "traje" $(37 - 9) : 4 = 7$ godina. Dakle, otac je bio 5 puta stariji od sina kad je sin imao 7 godina. To je bilo prije $(9 - 7 = 2)$ **dvije** godine.

Put do rješenja bio bi drukčiji da je Marin rečenice, uz odgovarajuće oznake, direktno preveo na "matematički" jezik. Označimo li primjerice sa:

x – godine sina, a sa

y – prije koliko godina je Vinko bio 5 puta stariji od sina,

tada se očeve rečenice pretvaraju u sustav dviju jednadžbi:

$$\begin{aligned} 37 + 5 &= 3(x + 5) \\ 37 - y &= 5(x - y). \end{aligned}$$

Preostaje odgonetnuti za koje će vrijednosti x i y ovaj račun biti valjan. Odgonetanje se svodi na skup jednostavnih pravila koja će nas, slijedimo li ih ispravno, dovesti do rješenja. Pritom je potpuno nebitno kakvo smo značenje pridali slovima x i y.

Tako iz prve jednadžbe dobijemo:

$$\begin{aligned} 42 &= 3x + 15 \\ 3x &= 27 \quad / : 3 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Uvrstimo li x u drugu jednadžbu, bit će:

$$\begin{aligned} 37 - y &= 5(9 - y) \\ 37 - y &= 45 - 5y \\ -y + 5y &= 45 - 37 \\ 4y &= 8 \quad / : 4 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Vrijednosti x i y više nisu nepoznate. Matematičari bi rekli da je sustav jednadžbi riješen. To znači da se iz matematičkog svijeta slobodno vratimo u onaj stvarni, jer sve su dileme riješene: Vinkov sin ima $(x = 9)$ devet godina; prije $(y = 2)$ dvije godine Vinko je bio 5 puta stariji od sina.