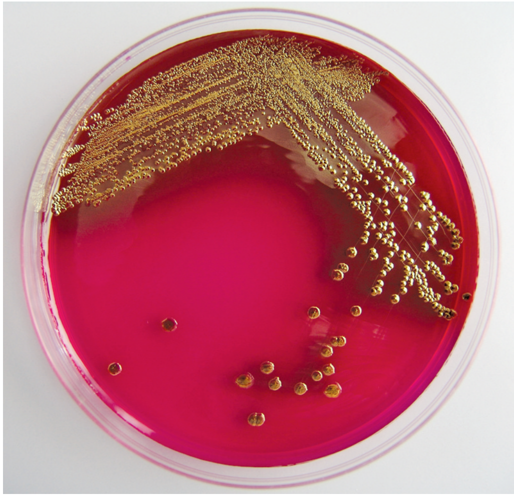
Realistic mathematics education: primjena na eksponencijalnu i logaritamsku funkciju

Ljerka Jukić Matić
i Dajana Zucić, Osijek



Što je to RME?

RME (*Realistic mathematics education*) kratica je koja označava **Realističnu matematičku edukaciju**. Njezin razvoj započeo je oko 1970. u Nizozemskoj. Upravo je za razvoj RME koncepta zaslužan Hans Freudenthal koji je u Utrechtu osnovao Institut za razvoj matematičke edukacije, a danas taj institut nosi njegovo ime te se zove **Freudenthalov institut za znanstvenu i matematičku edukaciju**. Freudenthal je smatrao da se matematika mora povezati sa stvarnim svijetom, da mora ostati blizu iskustvenog učenja te da mora biti korisna društvenoj zajednici kako bi imala pravu vrijednost. Umjesto školskog predmeta u kojem se znanje prenosi s nastavnika na učenika, Freudenthal je poticao ideju matematike kao "ljudske aktivnosti". Smatrao je da nastava matematike treba omogućiti učenicima vođeno otkrivanje matematičkih ideja. To zapravo znači da unutar matematičkog obrazovanja naglasak ne smije biti stavljen na matematiku kao zatvoreni sustav koji je sam sebi dovoljan, nego na aktivnost, na proces matematizacije. Tako postoje dvije vrste matematizacije: vertikalna i horizontalna matematizacija [2]. Kroz **horizontalnu matematizaciju** učenici dolaze do potrebnih matematičkih alata koji im pomažu organizirati i riješiti problem smješten u stvarnu životnu situaciju. **Vertikalna matematizacija** je proces reorganizacije unutar samog matematičkog sustava, primjerice, pronalaženje prečica i otkrivanje veza među konceptima i strategijama, te primjena tih otkrića. Zapravo možemo reći da horizontalna matematizacija ide iz stvarnog svijeta u svijet matematičkih simbola, dok je vertikalna matematizacija pomicanje unutar svijeta matematičkih simbola. Iako se ova razlika čini nedvosmislena, Freudenthal je istaknuo da ne postoji precizan rez između ova dva svijeta. Obje vrste matematizacije su jednako vrijedne. Štoviše, matematizacija se može dogoditi na različitim razinama razumijevanja matematičkih pojmova.

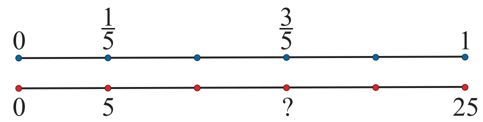
Pogrešna interpretacije riječi "realistična"

Unatoč jasnim opisima horizontalne i vertikalne matematizacije, RME je postala poznata kao matematička edukacija vezana uz stvarni svijet. Ovo se osobito proširilo izvan Nizozemske, ali čak se i u nekim dijelovima Nizozemske pojavljuje takva interpretacija. Upravo je riječ **realistična** izvor krivih tumačenja. Riječ realistična ne označava samo vezu sa stvarnim (realnim) svijetom, nego je vezana uz središte nizozemske matematičke edukacije u kojoj učenici matematičko znanje stječu razmatrajući problemske situacije koje mogu zamisliti. Prijevod riječi zamisliti na nizozemski jezik je *zich REALISEren*. Realistična matematička edukacija (RME) ime je dobila upravo po tome; ono što učenik može predočiti u svom umu. To znači da u problemima, koji se stavljaju pred učenika, mogu biti situacije iz stvarnog svijeta, ali da to i ne mora uvijek biti tako. Svijet mašte i bajki, kao i formalni matematički svijet, mogu dati odgovarajući kontekst sve dok to učenik može zamisliti.

Progresivna formalizacija

U srcu RME-a stoji progresivna formalizacija. To je proces u kojem se "od konkretnog ide prema apstraktnom", a pojavio se u edukaciji početkom prošlog stoljeća. No RME daje učeniku više od prijelaza od konkretnog prema apstraktnom. Slijed poučavanja u RME-u možemo zamisliti kao krivulje učenja, u kojima se kontekst problema koristi kao početna točka, koja potiče učenikovo neformalno zaključivanje. Zapravo, kontekst je izvor novog matematičkog znanja.

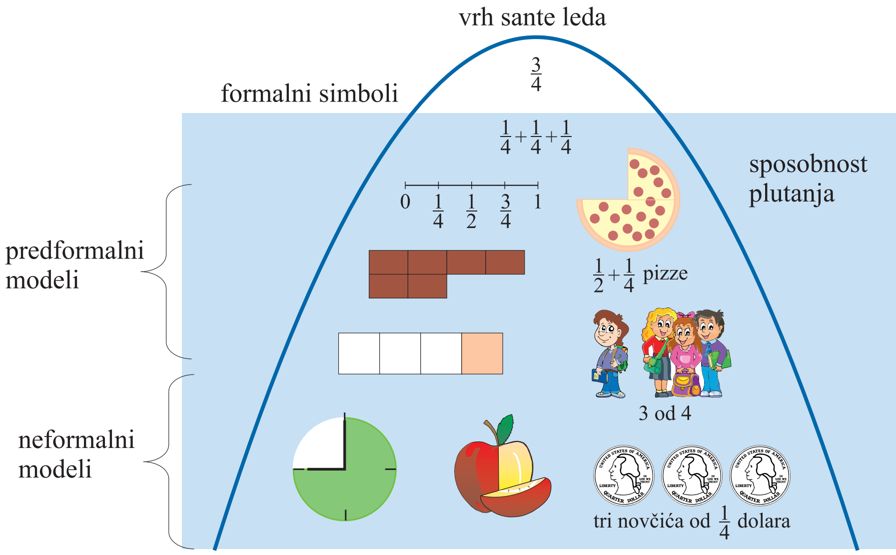
Ako je potrebno, nastavnik upoznaje učenike s predformalnim strategijama i vizualnim modelima koji progresivno postaju sve formalniji. Oni služe kao potpora za otkrivanje smisla i razvijanje matematičkog razumijevanja. Predformalne strategije često su učinkoviti prečaci, kao primjerice "razbijanje" velikih brojeva na manje kod problema dijeljenja, umjesto korištenja neprestanog oduzimanja. Predformalni modeli su prikazi koji se mogu koristiti u različitim kontekstima za rješavanje problema, kao što su tablica omjera ili dvostruki brojevni pravac kod proporcionalnih veličina (slika 1). Predformalne strategije i modeli vrlo su korisni jer su blisko povezani s učenikovim zaključivanjem. Predformalne strategije i modele učenici lakše razumiju, iako nekad nisu učinkovite kao formalni algoritmi.



Slika 1. Dvostruki brojevni pravac

Kontekst problema, vizualni prikazi, predformalne strategije i formalna matematika isprepleteni su kroz RME kurikul i poučavanje. Kontekst se ne daje na kraju učenja nekog koncepta i nije umjetno dodan, kao primjerice kod nas kada se uvode zadatci riječima. Ovdje kontekst služi kao početna točka neke realne situacije i potiče učenika na aktivnost. Kontekst se proširuje uzastopnim problemima, prikazima i strategijama kako bi se razvila koherentna krivulja učenja, koja se neprekidno izgrađuje i učvršćuje. Tako se stvaraju čvrste i jasne veze između konteksta, koncepata, proceduralnog znanja i učenikova razumijevanja formalne matematike.

Kako bi prikazali način na koji se ostvaruje progresivna formalizacija kroz poučavanje u RME-u, znanstvenici Freudenthal instituta za znanstvenu i matematičku edukaciju [3] razvili su "model sante leda" (slika 2). Santa leda sastoji se od vrha iznad površine mora, i većeg dijela ispod površine mora koji predstavlja sposobnost plutanja. Vrh sante leda predstavlja formalne procedure ili simbolički prikaz nekog koncepta. Prije nego se postigne ova formalna razina, učenici moraju razviti vještine i ostvariti uvid na manje formalnim razinama (sposobnost plutanja). Rabeći ovaj pristup, ranije stečeno učenikovo znanje vrednuje se kroz odgovore i reakcije u realističnom kontekstu, a on ih motivira na korištenje matematičkog jezika. Kasnije učenici koriste strukturirane modele kojima se postiže dublje razumijevanje simboličkih, formalnih prikaza. Ovakav model nam na zanimljiv način pokazuje da rad samo na formalnim procedurama i ignoriranje smislenih prikaza ispod površine mora nije učinkovit način za ostvarivanje matematičkog razumijevanja. Ako nisu prisutni poznati prikazi, direktni formalni pristup potiče učenike samo na prisjećanje. No, ako se u obzir uzmu i manje formalni prikazi, tada je veća vjerojatnost povezivanja učenikovih neformalnih znanja, razvijanja smisla za brojeve, ostvarivanja veza među prikazima i rješavanja problema.



Slika 2. Santa leda

Principi RME

Dakle, Realistična matematička edukacija u sebi sadrži viđenje kako učenici trebaju usvajati matematičke koncepte, kako se matematika treba poučavati i kako matematika treba izgledati kao školski predmet. To viđenje može se opisati s pomoću šest principa: princip aktivnosti, princip stvarnosti, princip razine, princip interakcije, princip isprepletenosti i princip vođenog otkrivanja [1]. Princip stvarnosti je opisan u gornjem tekstu, no pogledajmo sada ostale principe:

Princip aktivnosti. Ideja matematizacije se odnosi na poimanje matematike kao aktivnosti, što se prema Freudenthalu najbolje može ostvariti kroz aktivno sudjelovanje. Učenici su aktivni sudionici obrazovnog procesa u kojem razvijaju različite matematičke alate i stječu uvid u vlastite sposobnosti. Korištenje znanstveno strukturiranog matematičkog kurikula, u kojem su učenici izloženi gotovim matematičkim algoritmima i apstraktnim matematičkim konceptima, može se promatrati kao **antididaktička inverzija**. Ona se bazira na pogrešnoj pretpostavci da se rezultat matematičkog mišljenja može direktno prenijeti učenicima. Princip aktivnosti znači da su učenci izloženi problemskim situacijama u kojima oni stvaraju matematičke koncepte i postupno razvijaju odgovarajuće algoritme kroz vlastite neformalne metode.

Princip razine. Ovdje učenje matematike znači da učenici prolaze kroz različite razine razumijevanja: od sposobnosti da izmisle neformalna rješenja vezana uz određeni kontekst, do stvaranja različitih prečaca, stjecanja uvida u temeljne principe i proницanje u šire odnose. Uvjet za dolazak na sljedeću razinu je učenikova sposobnost da analizira i razmišlja o provedenim aktivnostima.

Princip isprepletenosti. Cjeline u matematici ne mogu se razdvojiti. Štoviše, rješavanje problema u bogatim kontekstima često znači da će se morati primijeniti široki spektar matematičkih alata i znanja. Na primjer, ako učenici moraju procijeniti veličinu zastave, ova procjena ne uključuje samo mjere, nego omjere i geometriju. Princip isprepletenosti čini kurikul koherentnim, i u tome leži njegova snaga. Cjeline su povezane, a isti se koncepti mogu naći u različitim cjelinama.

Princip interakcije. Učenje matematike je društvena aktivnost. Obrazovanje treba omogućiti učenicima da međusobno razmijene svoje strategije i otkrića. Slušajući ono što su drugi otkrili i raspravljajući o otkrićima, učenici dobivaju ideje za poboljšanje vlastitih strategija. Ovakva interakcija učenicima omogućuje postizanje više razine razumijevanja. Poučavanje cijelog razreda osobito je važno unutar RME-a. Međutim, to ne znači da cijeli razred napreduje zajedno i da svaki učenik dostiže istu razinu razvoja u istom trenutku. Naprotiv, u RME-u učenici se promatraju kao pojedinci, koji imaju vlastiti, individualni put učenja. Ovaj pogled na učenje često rezultira nastavom u malim skupinama, gdje svaka skupina ima svoju krivulju učenja. U RME-u, međutim, razred se nastoji očuvati kao cjelina, zajednica, te postoji prilagođavanje različitim razinama učeničkih sposobnosti. To se može učiniti dajući učenicima mogućnost učenja na problemima koji se mogu riješiti različitim razinama razumijevanja.

Princip vođenog otkrivanja. Jedan od ključnih Freudenthalovih načela matematičkog obrazovanja je vođeno otkrivanje matematike tj. učenicima se omogućuje da kroz "vođenje" imaju priliku ponovno izumiti, otkriti "matematiku". U RME-u, nastavnici i obrazovni programi imaju ključnu ulogu u načinu na koji učenici stječu znanja. Oni usmjeravaju proces učenja, ali ne na fiksan način tako što demonstriraju što učenici moraju naučiti. To je u suprotnosti s principom aktivnosti i dovodi do pseudo-razumijevanja. Umjesto toga, učenici trebaju prostor za izgradnju vlastitih matematičkih uvida i alata. Kako bi došli do željenog stanja, nastavnici moraju pružiti učenicima okruženje za učenje u kojem se pojavljuje proces izgradnje. Nastavnici moraju biti u stanju predvidjeti gdje i kako potaknuti razvoj učeničkog znanja i vještina. Stoga, obrazovni programi trebaju sadržavati scenarije koji imaju potencijal "skele", potpore, kod stjecanja znanja. Za ove je scenarije važno da su uvijek usmjereni prema dugoročnoj trajektoriji učenja. A bez ovakvog stava, nije moguće voditi učenike.

Progresivna formalizacija i logaritamska funkcija

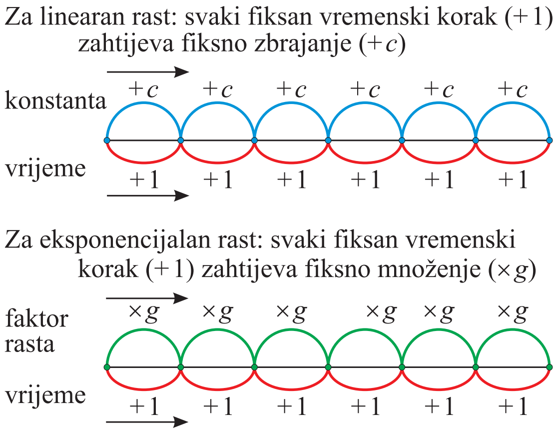
U većini naših srednjoškolskih udžbenika logaritamska se funkcija uvodi kao inverzna funkcija eksponencijalnoj, koristeći relaciju $y = b^x \iff x = \log_b y$. A zatim se daju pravila logaritmiranja tj. svojstva logaritamske funkcije (npr. $\log a + \log b = \log ab$) koja se povezuju sa svojstvima eksponencijalne funkcije. Iako je ovaj pristup matematički ispravan, on učenicima ne nudi smislenu vezu logaritma i ranije viđenih matematičkih prikaza. Kako bi se pojam logaritma konceptualizirao, učenici moraju razumjeti eksponencijalni rast. Ovdje ćemo pokazati drugačiji pristup uvođenja logaritamske funkcije korištenjem RME pristupa [4], a koji bismo mogli provesti i u našim školama.

Neformalni i predformalni pristup

Da bi RME pristup bio uspješan za logaritamsku funkciju, nužno je i eksponencijalnu funkciju uvesti na takav način. Pojam eksponencijalnog rasta možemo prikazati uspoređujući linearan i eksponencijalan rast u nekoj polurealističnoj situaciji:

Zadatak 1. *Dva su prijatelja istoga dana kupila kobile. Obje kobile imale su masu po 50 kilograma. Nakon mjesec dana prijatelji su uspoređivali mase svojih kobila. Tomislav je rekao: "Moja kobila je dobila 10 kilograma." Ivan je rekao: "A moja 20 % svoje mase." Idući mjesec prijatelji su ponovno razgovarali i Tomislav je ustvrdio da se njegova kobila udebljala još 10 kg, a Ivan da je njegova dobila još 20 %. Koliko su se kobile udebljale za dva mjeseca?*

Početni kontekst i pitanje zapravo razotkrivaju krivo stečena znanja o postotcima (slika 3). U razredu treba razviti diskusiju o različitim uzorcima rasta koji su dani u uvodnom primjeru. Oba rasta treba prikazati predformalnim modelima koji će dalje služiti za zaključivanje o eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji. Te modele možemo vidjeti na slici 3. Ovdje se koristi dvostruki brojevni pravac. Iako su

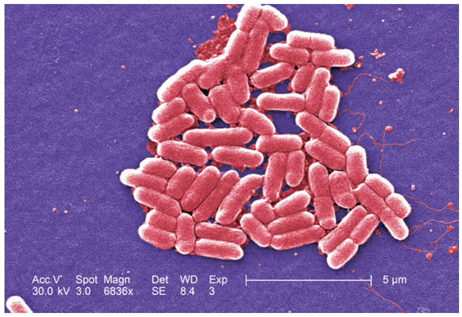


Slika 3. Faktori rasta

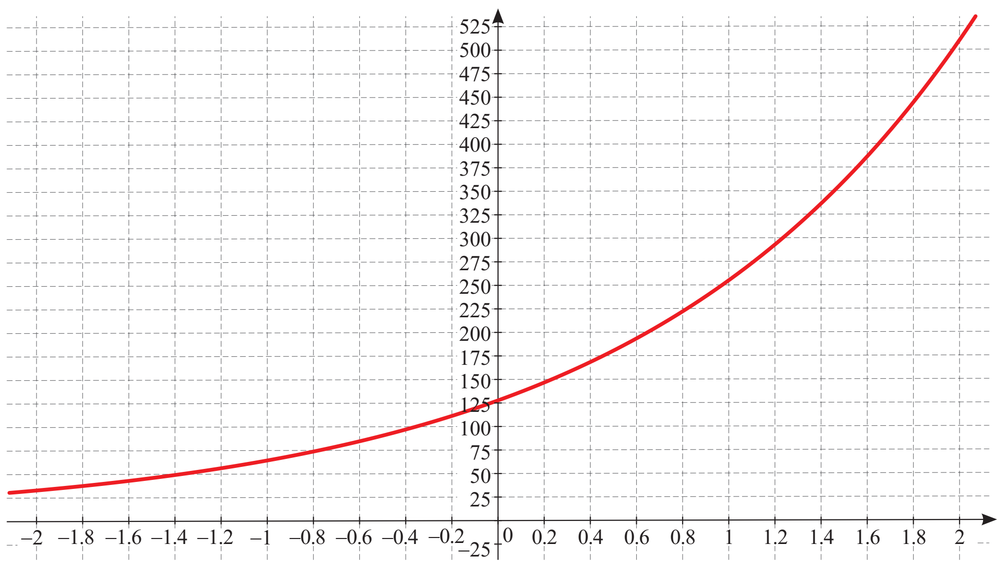
modeli slični i mogu navesti učenika na krivi smjer zaključivanja, upravo ta sličnost je ključna za razvoj razumijevanja nagiba (koeficijenta smjera) kod linearne funkcije i baze za eksponencijalnu funkciju. Jedan pravac ima konstantni aditivan, a drugi konstantni multplikativan rast. U oba slučaja, trajanje rasta, tj. vremenska varijabla t ima važnu ulogu.

Dodatni primjeri koji povezuju neformalno i predformalno zaključivanje uključuju istraživanje problema bakterija u kojemu se obujam bakterije udvostručuje svaka dva sata.

Zadatak 2. *Počevši sa 128 bakterija E. Coli čiji se obujam (i broj) udvostručuje svaka dva sata, funkcija koja opisuje ovaj proces rasta može se zadati na sljedeći način $V(t) = 128 \cdot 2^t$, gdje je t vrijeme (u jedinicama od 2 sata), a V obujam bakterije E. Coli. U trenutku $t = 0$, obujam bakterija je 128, a u trenutku $t = 1$, obujam (i broj) bakterija se udvostručio i iznosi 256. No, između trenutka $t = 0$ i $t = 1$, obujam eksponencijalno raste od 128 do 256. Dan je graf (slika 4) koji prikazuje sve vrijednosti između 128 i 256.*



1. *Korištenjem grafa, napravite točnu procjenu obujma E. Coli nakon jednog sata (dakle za $t = 0.5$), i nakon 3 sata (za $t = 1.5$).*
2. *Ako se oba broja podijele, dobit će se točno vrijednost 2. Zašto?*



Slika 4. Bakterije

3. *Korištenjem (grafičkog) kalkulatora pronađi vrijednosti za $V(0.5)$ i $V(1.5)$.*
4. *Objasni zašto bi* $\frac{V(0.5)}{V(0)}$, $\frac{V(1)}{V(0.5)}$, $\frac{V(1.5)}{V(1)}$ *i* $\frac{V(2)}{V(1.5)}$ *trebale imati istu vrijednost.*
5. *Koji je rezultat svakog omjera? Objasni što predstavlja taj omjer.*
6. *Koja je veza tog rezultata i faktora rasta 2 (za dva sata)?*

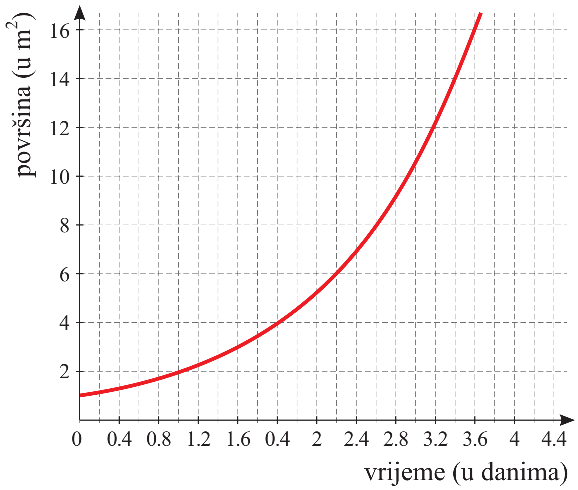
Udvostručivanje kao faktor rasta bakterije *E. Coli* u nekom vremenskom trenutku dano je s točno određenom svrhom. Taj faktor rasta generira uzorak koji je učenicima jednostavniji za zaključivanje od stvarnog faktora. Također, udvostručivanje kao faktor rasta kasnije se povezuje s logaritamskom funkcijom te je i to jedan od razloga zašto se ono rabi. Dodatno je u zadatku prikazan i graf za različite obujme. Korištenje tog grafa i povezanih omjera naglašava stabilnost i predvidljivost funkcije kada je razlika između dvaju vremenskih perioda jednaka.

Prijelaz na logaritme

Nakon eksponencijalne funkcije prelazimo na logaritamsku funkciju. Možemo početi problemom u kontekstu u kojem treba povezati graf i tablicu s podatcima za površinu koju prekriva vodena leća. Od učenika se zatim traži da interpretiraju dani graf kako bi odredili koliko je vremena potrebno vodenoj leći da naraste x m^2. Tada to postaje nastavak problema s kobilama i bakterijama. Kada se tablica popuni vrijednostima koje se mogu očitati s grafa, učenici trebaju naći vrijeme za površine koje nisu dane na grafu.

Zadatak 3. *Vodena leća nalazi se u jezeru. Površina koju prekriva vodena leća udvostručuje se svaki dan. Formula koja opisuje taj proces je $P = 2^t$. Graf na slici 5 prikazuje taj proces za prva četiri dana. Korištenjem grafa odgovori na sljedeća pitanja:*

1. *U kojem trenutku će biti 3 m^2 vodene leće u jezeru? A 6 m^2? A 12 m^2?*
2. *Bez pomoći grafa odgovori na pitanje: U kojem trenutku će vodena leća prekrivati 24 m^2?*
3. *Kada će biti 5 m^2, 10 m^2, 20 m^2 vodene leće?*



Slika 5. Vodena leća

Popuni tablice:

Površina (u m^2)	3	6	12	24		
Vrijeme (u danima)	1.6					

Površina (u m^2)	2.5	5	10	20		
Vrijeme (u danima)			2.3			

Površina (u m^2)		0.25	0.5	1		
Vrijeme (u danima)				0		

Tablica 1.

Učenicima se prikazuje tablica koja sadrži različita vremena i odgovarajuće površine vodene leće (tablica 1). Od učenika se traži da pronađu uzorak u tablici i da objasne smisao tog uzorka. Uvodi se notacija $t(P)$ kao oznake za "vrijeme (t) koje je potrebno da se prekrije površina P, počevši s površinom od 1 metra kvadratnog". Tako $t(8)$ označava da je potrebno 3 dana da bi površina narasla do 8 m^2, $t(20) = 4.32$ označava da je potrebno 4.32 dana da bi početna površina od 1 m^2 narasla do 20 m^2.

P	1	2	3	4	5	6	7
t	0	1	1.58	2	2.32	2.58	2.81
P	8	9	10	11	12	13	14
t	3	3.17	3.32	3.46	3.58	3.7	3.81
P	15	16	17	18	19	20	21
t	3.91	4	4.09	4.17	4.25	4.32	4.39
P	22	23	24	25	26		
t	4.46	4.52	4.58	4.64	4.7		

Tablica 2.

Korištenjem gornje tablice 2 učenici mogu pronaći uzorke kao $t(5) + t(3) = t(15)$, $t(25) = 2 \cdot t(5)$ i $t(18) - t(2) = t(9)$. Ti uzorci učenicima imaju smisla i oni su predformalni prethodnici pravila za produkt, potenciranje i kvocijent logaritama.

Formalizacija

Nakon shvaćanja pojma eksponencijalne funkcije, a prije uvođenja logaritamske funkcije, probleme s kontekstom treba smanjivati, a povećavati probleme s formalnim prikazima eksponencijalnog rasta i pada (opadanja). Vizualni prikazi, kao dvostruki brojevni pravac, trebaju se koristiti za proučavanje matematičkih struktura i generalizaciju eksponencijalnog fenomena. Tijekom diskusije o pravilima s eksponentima i povezanih koncepata, učenici se mogu vraćati na prijašnji istraživani kontekst kao referentnu točku za postizanje smisla. Nadalje, generalizacija veze navodi učenike da uoče pravila za produkt. U okviru RME-a, kada se produbi učenička sposobnost zaključivanja s pomoću apstraktnih simbola, neki učenici će zaključivati o logaritamskoj funkciji bez ikakvog povezivanja s kontekstom, dok će se neki vraćati na kontekst u koji je uključeno vrijeme. Primjerice, izraz $\log_2(5) + 3$ može se promatrati u kontekstu vrijeme – površina: kao vrijeme koje je potrebno da se površina upeterostruči plus još 3 dana (tijekom kojih se poveća 8 puta, tj. $2 \cdot 2 \cdot 2$). To rezultira vremenom koje je potrebno da se postigne 40 puta veća površina od početne. Formalan prikaz ove situacije može se zapisati kao $\log_2(5) + 3 = \log_2(5) + \log_2(2^3) = \log_2(5 \cdot 8) = \log_2(40)$. Ovakav pristup omogućava jednostavnije razumijevanje pojma *logaritam*, čak i za one učenike koji sa sigurnošću koriste simboličke izraze.

LITERATURA

1/ M. Van den Heuvel-Panhuizen, (2000.): *Mathematics Education in The Netherlands: A guided tour*, Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9, Utrecht: Freudenthal Institute.

2/ A. Treffers, (1991.): *Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990*, In L. Streefland (ed.), Realistic Mathematics Education in Primary School, Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

3/ D. C. Webb, N. Boswinkel & T. Dekker, (2008.), *Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding*, Mathematics Teaching in the Middle School, 14(2), 110–113.

4/ D. C. Webb, H. van der Kooij & M. R. Geist, (2011.), *Design research in the Netherlands: Introducing logarithms using Realistic Mathematics Education*, Journal of Mathematics Education at Teachers College, 2(1), 47–52.