Tragom jednog zadatka

Jens Carstensen i Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

Kada u drugom razredu srednje škole učimo o primjeni kvadratne funkcije, obično rješavamo i ovaj zadatak.

Zadatak 1. *Od svih pravokutnika danog opsega, odredite onaj s najvećom mogućom površinom.*

Rješenje. Širinu pravokutnika označimo s x, a njegovu duljinu s y i opseg sa s. Dalje imamo:

$$2x + 2y = s$$
$$P(x, y) = x \cdot y \to \max .$$

Iz $2x + 2y = s$ slijedi $y = \frac{1}{2}(s - 2x)$, pa je $x \cdot y = \frac{x}{2}(s - 2x)$.

Tako smo problem sveli na određivanje maksimuma kvadratne funkcije

$$P(x) = -x^2 + \frac{s}{2} \cdot x.$$

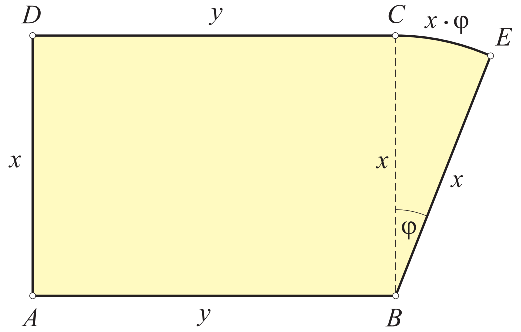
Ovdje je vodeći koeficijent negativan, pa funkcija ima maksimum za

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{s}{2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{s}{4}.$$

Tada je $y = \frac{1}{2}\left(s - 2 \cdot \frac{s}{4}\right) = \frac{s}{4}$. Dakle, najveću moguću površinu ima kvadrat sa stranicom $\frac{s}{4}$ i površinom $\frac{s^2}{16}$.

Promotrimo sada lik kao na sl. 1 i riješimo zadatak.

Zadatak 2. *Od svih likova danog opsega s, kao na sl. 1, odredite onaj s najvećom površinom.*



Slika 1.

Rješenje. Površina lika na sl. 1 jednaka je zbroju površina, pravokutnika $ABCD$ koji ima širinu x i duljinu y, i kružnog isječka CBE s polumjerom x i centralnim (središnjim) kutom φ. Poznato je da se veličina centralnog kuta φ (mjerenog u radijanima) određuje s pomoću omjera kružnog luka l i polumjera x kružnice, tj. $\varphi = \frac{l}{x} \iff l = x \cdot \varphi$.

Pretpostavimo da je $0 < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ (ova pretpostavka učinjena je da bismo izbjegli preklapanje površine kružnog isječka i površine pravokutnika). Opseg lika je $s = 2x + 2y + x \cdot \varphi$ i odavde slijedi

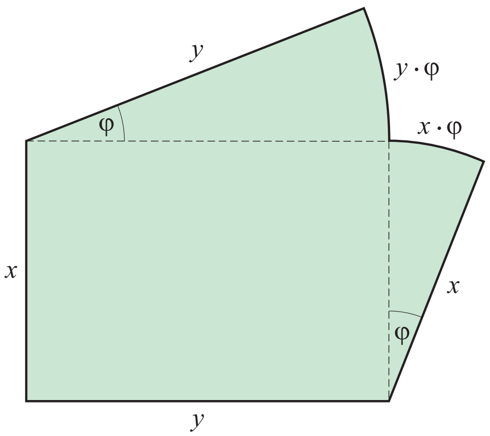
$$y = \frac{1}{2}(s - 2x - x\varphi). \qquad (1)$$

Površina kružnog isječka CBE je $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi x^2 = \frac{1}{2}\varphi x^2$, a površina lika na sl. 1 je

$$\begin{aligned} P &= x \cdot y + \frac{1}{2}\varphi x^2 \\ &\overset{(1)}{=} x\frac{1}{2}(s - 2x - \varphi x) + \frac{1}{2}\varphi x^2 \\ &= \frac{1}{2}x(s - 2x - \varphi x + \varphi x) \\ &= -x^2 + \frac{s}{2}x. \end{aligned}$$

Vrlo zanimljivo! (Usporedi sa zadatkom 1 i komentiraj!)

Modificirajmo sada zadatak 2 ovako: *Od svih likova danog opsega, kao na sl. 2, odredite onaj s najvećom mogućom površinom.*



Slika 2.

Rješenje. Označite kao na sl. 2 i neka je $0 < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Opseg lika je

$$\begin{aligned} s &= 2x + 2y + x\varphi + y\varphi \\ &= 2(x+y) + \varphi(x+y) = (2+\varphi)(x+y). \end{aligned}$$

Odavde je

$$x + y = \frac{s}{2+\varphi} \tag{2}$$

i

$$y = \frac{s}{2+\varphi} - x. \tag{3}$$

Površina lika je

$$\begin{aligned} P &= xy + \frac{1}{2}\varphi(x^2 + y^2) \\ &= xy + \frac{1}{2}\varphi[(x+y)^2 - 2xy] \\ &= xy + \frac{1}{2}\varphi(x+y)^2 - \varphi xy \\ &= xy(1-\varphi) + \frac{1}{2}\varphi(x+y)^2 \\ &\overset{(2),(3)}{=} x \cdot \left(\frac{s}{2+\varphi} - x\right)(1-\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\frac{s^2}{(2+\varphi)^2} \\ &= (\varphi - 1)x^2 + \frac{s(1-\varphi)}{\varphi+2}x + \frac{\varphi s^2}{2(\varphi+2)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ovisno o veličini kuta φ promatramo slučajeve:

1° Ako je $0 < \varphi < 1$ vodeći je koeficijent negativan pa funkcija ima maksimum za

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = \frac{-\dfrac{s(1-\varphi)}{\varphi+2}}{2(\varphi-1)} \\ &= \frac{s(\varphi-1)}{2(\varphi-1)(\varphi+2)} = \frac{s}{2(\varphi+2)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Tada je

$$\begin{aligned} y &\overset{(3),(5)}{=} \frac{s}{2+\varphi} - \frac{s}{2(\varphi+2)} \\ &= \frac{2s - s}{2(\varphi+2)} = \frac{s}{2(\varphi+2)} \overset{(5)}{=} x. \end{aligned}$$

Opet je dakle, pravokutnik – kvadrat.

2° Ako je $\varphi = 1$, onda je

$$P = \frac{\varphi s^2}{2(\varphi+2)^2} = \frac{1 \cdot s^2}{2(1+2)^2} = \frac{s^2}{18}$$

tj. površina je konstantna.

3° Ako je $1 < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, lako se pokazuje da funkcija za $x = \frac{s}{2(\varphi+2)}$ poprima minimalnu vrijednost $y = \frac{s}{2(\varphi+2)}$, tj. opet je $x = y$.

LITERATURA

1/ Nick Lord: *Two surprising maximization problems*, The Mathematical Gazette, November 2013.

2/ Jens Carstensen, Alija Muminagić: *En optimeringsopgave, 3*, prihvaćeno za objavljivanje u LMFK–BLADET.