

Koračanje po brojevnom pravcu

Maja Cindrić, Zadar

Od samih početaka nastave matematike u osnovnoj školi, brojevni pravac koristan je i važan model koji pomaže učenicima u izgradnji kvalitetnog koncepta broja. U početnoj nastavi matematike umjesto pojma **brojevni pravac** koristimo se pojmom **brojeva crta**. Model brojne crte poveznica je između konkretnog i apstraktnog te među skupovima brojeva.



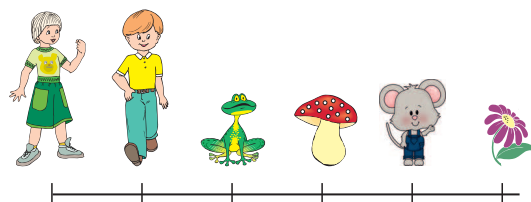
Gledajući brojnu crtu samo izoliranu u pojedinom dijelu matematičkog gradiva nije moguće uočiti njezinu važnost. Ponekad je moguće čuti od nastavnika da zanemaruju primjenu brojne crte, jer brojna crta u učionici ometa učenike da automatiziraju zbrajanje i oduzimanje do 20. Brojna crta svakako nije alat za dugotrajno računanje do 20, ali premošćuje put od računanja s konkretnim stvarima prema automatiziranom računanju, a da se učenici pritom navikavaju na različite reprezentacije pojedinog koncepta. Svakako nije razlog za zanemarivanje brojne crte u okviru matematičkog gradiva.

Pristup brojnoj crti u nižim razredima, ako se primijeni u višim razredima, korisna je poveznica cijelih, racionalnih i realnih brojeva s prirodnim brojevima, stoga će ovdje biti prikazana brojna crta kroz nastavu matematike u osnovnoj školi, od prvog do osmog razreda.

S brojnom se crtom učenici upoznaju u prvom razredu na samom početku učenja o brojevima do 5. Nakon što nauče prebrojavati različite skupove od pet elemenata, učenike možemo upoznati s brojnom crtom. Za razliku od skupovnog modela, brojna crta uvodi uređaj u skupu prirodnih brojeva. Kada govorimo o prebrojavanju skupova do pet

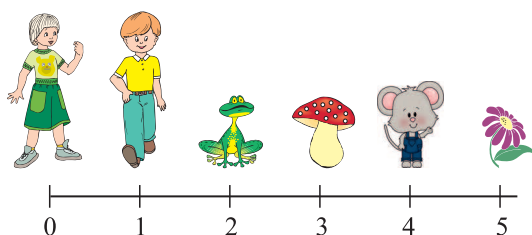
elemenata, valja naglasiti da se ne prebrojavaju samo skupovi konkretnih elemenata, već i zamišljeni skupovi, kao što je skup slova, skup riječi, skupovi pokreta, izgovorenih riječi i sl. Ta vještina korisna je za izgradnju modela brojne crte. Učenicima kod brojne crte i računanja na brojnoj crti najveći problem predstavljaju "razmaci" između točaka kojima je pridružen broj. Ako npr. s pomoću brojne crte žele zbrojiti 23 i 14, kreću od 23, ali nisu sigurni odbrojavaju li 14 "razmaka" ili 14 "crtica" što dovodi do krivog rezultata, jer broje i početnu crticu. Stoga u samim početcima dobro je uvesti brojnu crtu upravo s pomoću razmaka ili nečega bližeg učenicima – koracima.

"Ana stoji na putu. Jedan korak od Ane nalazi se Ivo. Tko se nalazi dva koraka od Ane, tri koraka od Ane, četiri koraka od Ane i pet koraka od Ane?" (slika 1).



Slika 1. Model ceste kao prijelaz prema modelu brojne crte

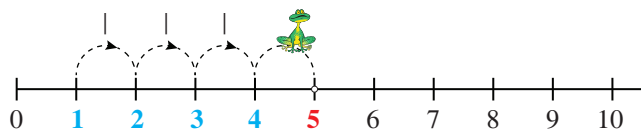
Nakon što učenici odgovore, svakom pojedinom elementu na crti pridružuju se brojevi koji ukazuju koliko koraka je svatko udaljen od Ane (slika 2). Takvim postupkom ideja brojevnice, koja tek kasnije prerasta u model, nadovezuje se na poznate i usvojene vještine, prebrojavanje koraka i samo fizičko koračanje.



Slika 2. Brojeva crta

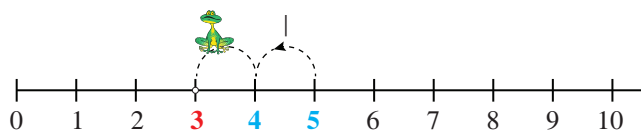
Na pitanje koliko je koraka Ana udaljena sama od sebe na brojevnju crtu smještamo i nulu. Nulom označimo mjesto od kojeg počinjemo brojiti korake. Može krenuti diskusija o prebrojavanju koraka od lve do žabe, od žabe do gljive itd. Ovako nadopunjena brojeva crta uvodi uređaj u skupu prirodnih brojeva usporedbom broja koraka: dva koraka više je od jednog, tri su više od jednog ili od dvaju koraka itd. Postupno se od konkretnog modela prelazi na uspoređivanje brojeva s pomoću brojevnice, gdje treba imati na umu čestu pogrešku koju čine učenici zaključujući da je manji onaj broj koji je na brojevnju crti bliže nuli. Takva zablude u višim razredima dovodi do pogreške u shvaćanju odnosa među cijelim brojevima. Dakako, broj -1 je na brojevnju crti bliži nuli od broja -3 , što nikako ne znači da je -1 manji od -3 . Koristeći stoga horizontalnu brojevnju crtu kao model za uspoređivanje brojeva, dovoljno je reći da je od dvaju brojeva manji onaj koji je na brojevnju crti više ulijevo.

Zbrajanje i oduzimanje na brojevnju crti uvodimo kao brojenje koraka, ponovno se povezujući na poznato: "Koliko koraka treba Ana načiniti od žabca do miša?", "Gdje je bila Ana ako je u dva koraka došla do gljive?" Zbroj $1 + 4$ prikazujemo na brojevnju crti tako da počevši od broja 1 "napravimo" 4 koraka udesno (slika 3). Mjesto gdje se zaustavimo rezultat je zbrajanja.



Slika 3. Zbrajanje na brojevnju crti s pomoću skokova

Kod oduzimanja krećemo od umanjenika ulijevo onoliko koraka koliki je umanitelj. Mjesto zaustavljanja pokazuje nam rezultat oduzimanja (slika 4).

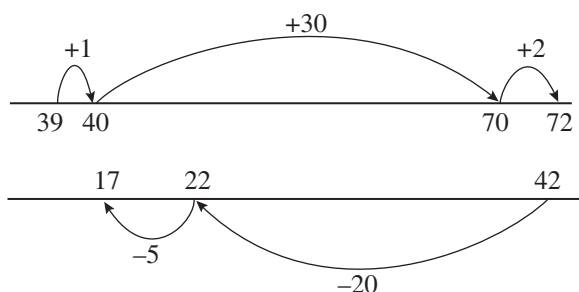


Slika 4. Oduzimanje na brojevnju crti s pomoću skokova

U početku se učenici pomiču po brojevnju crti za jedan, ali ne treba ih sprečavati ako mogu preskočiti više razmaka odjednom. Dopuštajući učenicima da se kreću brojevnju crtom u koracima koji im odgovaraju, možemo uvesti model tzv. prazne brojevnice, koji je još jedan u nizu koraka prema mentalnoj reprezentaciji skupa prirodnih brojeva na brojevnju pravcu. Model prazne brojevnice posebno je koristan učenicima pri mentalnom zbrajanju i oduzimanju brojeva do 100 a da se ne koristi pisani algoritam za zbrajanje i oduzimanje. Omogućava im da samostalno razvijaju strategije računanja, a nastavnicima omogućava uvid u načine razmišljanja učenika, što je moguće unaprijediti. Prazna brojeva crta je pravac bez oznaka jediničnih dužina i brojki koje mu pripadaju, a služi učenicima kao pomoć u vizualizaciji misaonog računanja (u literaturi često zvanog usmenog računanja). Individualni pristup praznoj brojevnju crti omogućit će svakom učeniku da kreće od svog predznanja i ovisno o svojim mogućnostima zbraja i oduzima.

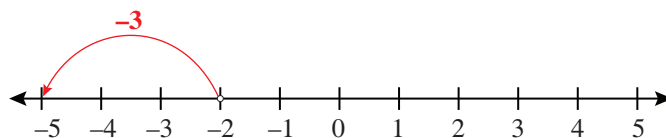
Prije samog korištenja prazne brojevnice crte učenici se moraju znati snalaziti na brojevnju crti s oznakama i brojkama. Kao što se nakon određenog vremena učenici snalaze na dijelu brojevnice crte gdje nije prikazana nula, već samo dio crte, tako je nakon određenog vremena moguće uvesti praznu brojevnju crtu. Ponovno valja napomenuti da prazna brojeva crta nije zamjena za misaoni račun, već samo jedna stepenica na putu prema takvom računanju i kvalitetnoj izgradnji koncepta prirodnog broja. Za početak s učenicima možemo govoriti o

koracima po 1 i koracima po 10 i pitati ih: "Koliko skokova po 1 i skokova po 10 moramo načiniti da bismo došli od 0 do 25?", a nakon toga "Koliko skokova po 1 i skokova po 10 moramo načiniti od 0 do 78?". Nakon upoznavanja sa skokovima različitih veličina po brojevnoj crti možemo pitati učenike: "Koliko nam skokova po 1 treba od broja 23 do 48?", "Možemo li brže (u većim skokovima) stići od 23 do 48?" itd. Takve vježbe dovode učenike do postupnog prelaska na mentalnu razinu, koristeći vlastite strategije i mogućnosti.



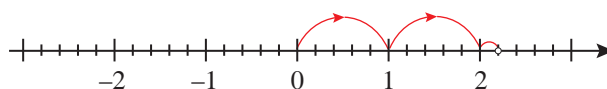
Slika 5. Model prazne brojevne crte

Iako su algoritmi pisanog zbrajanja i oduzimanja efektivni modeli računanja koji u trećem i četvrtom razredu istiskuju sve ostale modele računanja, dobro je često provlačiti i koristiti model brojevne crte u računanju, kako bi taj model mogao povezati zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva sa zbrajanjem i oduzimanjem prirodnih brojeva. Model brojevne crte kod zbrajanja cijelih brojeva pokazuje se korisnim za uvod u zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva, kao i uvođenje pojma apsolutne vrijednosti. Tako je zbroj brojeva $-3 + 5$ moguće prikazati kao kretanje od -3 , 5 koraka udesno. Rezultat je broj do kojeg se pri tom kretanju došlo. Prema tome, zbrajanje cijelih brojeva analogno je zbrajanju prirodnih brojeva na brojevnoj crti. Kratko proširivanje činjenice, koja kaže da ako je drugi pribrojnik negativan broj, umjesto udesno krećemo ulijevo, neće dovesti do velikih odstupanja od analogije sa zbrajanjem prirodnih brojeva. U svakom dijelu gradiva dobro je prikazati povezanost sa starim dobro usvojenim gradivom. Zbrajanjem i oduzimanjem cijelih brojeva na brojevnoj crti učenici se postupno dovode do automatizma u zbrajanju i oduzimanju cijelih brojeva bez upotrebe bilo kakvog zornog modela ili pravila zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva koje se može upamtiti samo dugotrajnim uvježbavanjem.



Slika 6. Model brojevne crte za računanje s cijelim brojevima

Koraci mogu pomoći i kod smještaja racionalnih brojeva na brojevnoj crti, koji učenicima često predstavljaju problem. Koraci različitih veličina mogu predstavljati jedinicu ili neki njezin manji dio. Tako manji korak predstavlja $\frac{1}{5}$, dok veći korak predstavlja jedinicu. Do označene točke dolazimo dvama većim koracima i jednim malim korakom, dakle označenoj točki pridružujemo broj $2\frac{1}{5}$. Ako koracima idemo udesno od 0, dolazimo do pozitivnih brojeva, a ako koračamo ulijevo, dolazimo do negativnih racionalnih brojeva.



Slika 7. Model brojevne crte za racionalne brojeve

Povezivanje u matematici sa svim aspektima određenog koncepta, kao i povezivanje na različitim razinama matematičkog znanja, presudno je za izgradnju kvalitetnog matematičkog koncepta. Brojeva crta, kao i mnogi drugi modeli, korisna je uvelike za kvalitetan razvoj koncepta broja, na svim razinama, zato je važno koristiti je u adekvatnoj mjeri u nastavi, ali i povezivati je s prethodno korištenim modelima.

LITERATURA

- 1/ D. L. Ball, H. Bass: Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics, J. Boaler (ur.), *Multiple perspectives on the teaching and learning mathematics* (2000), Westport, CT, pp. 83–104.
- 2/ A. S. Klein, M. Beishuizen: The Empty Number Line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design, *JRME* (1998), Vol. 29, No. 4, pp. 443–464.
- 3/ P. Ernest: The number line as a teaching aid, *Educational studies in mathematics* (1985), Vol. 16, No. 4, pp. 411–424.