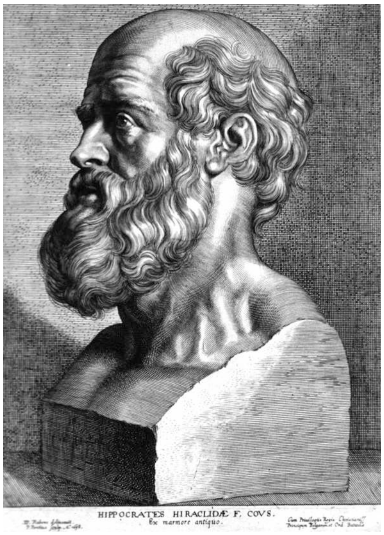
Tko je prvi
točno odredio površinu nekog lika obrubljenog krivuljama?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Nakon što smo se u prva dva nastavka bavili uvođenjem simbola četiriju osnovnih računskih operacija, napravit ćemo predah od povijesti matematičkih simbola i pozabaviti se malo prvenstvom u sadržajnom smislu. Od mnoštva mogućih tema, za ovaj broj odabrah: *Tko je prvi točno odredio površinu nekog lika obrubljenog krivuljama?*



Hipokrat

Dok je određivanje površine pravokutnika poznato iz pradavnih vremena, a u doba pitagorejaca (6. st. pr. Kr.) je uočeno kako iz toga dobiti pravila[1] za određivanje površina raznih mnogokuta, točno određivanje površina likova obrubljenih krivuljama ima dugu povijest. Iako je načelno za taj problem potreban integralni račun (razvili su ga Newton i Leibniz krajem 17. stoljeća), već su stari Grci raspolagali njegovim ranim oblikom, poznatim pod imenom metoda ekshaustije, koju su – posebice Arhimed – primijenili na određivanja mnogih površina (i obujama). Ipak, niti je itko prije otkrića integralnog računa dao opći postupak za određivanje površina likova zakrivljenog ruba, niti je za sve njih potreban integralni račun.

Možda mislite da je prva utvrđena površina takvog lika bila površina kruga, no nije – iako nije daleko od istine. Naime, tijekom 5. st. pr. Kr. grčki su se matematičari počeli baviti problemom površine kruga. Zapravo, bilo bi bolje reći: kvadrature. Naime, aproksimativne metode za izračunavanje površine kruga imali su još stari Egipćani i Babilonci, no tek su grčki matematičari matematiku učinili egzaktnom znanošću. Pritom je posebno bitnu ulogu igrao Platonovoj *Akademiji* pripisan zahtjev da se geometrijske konstrukcije priznaju samo ako su provedene ravnalom (bez oznaka) i šestarom.[2] Problem površine kruga tako je postao problem konstrukcije stranice kvadrata koji ima istu površinu kao krug zadanog polumjera – problem kvadrature kruga. I tako su se tijekom 5. st. pr. Kr. mnogi prihvatili tog – kako danas znamo: beznadnog – posla.

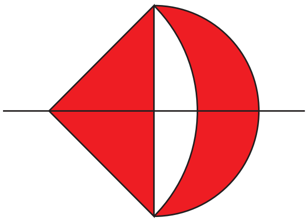
Najznamenitiji grčki matematičar tog doba bio je Hipokrat s Hiosa. On je izvorno bio trgovac, koji se u jednom trenu počeo baviti matematikom. Legende – moguće istinite – kažu da se matematikom počeo baviti u Ateni čekajući odštetu nakon što su mu gusari pokrali imovinu. Bilo kako bilo, Hipokrat

[1] Možda biste radije da ovdje piše riječ "formule", no formule – koje su same po sebi samo koncizni zapisi pravila – u suvremenom smislu nisu postojale prije renesanse (zapravo, tad su se tek počele razvijati).
[2] Danas znamo: geometrijski problemi koji se mogu svesti na rješavanje kvadratne jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima rješivi su ravnalom i šestarom.

se počeo baviti i problemom kvadrature kruga i pritom primijetio (neki kažu: i dokazao[3]) da svi krugovi imaju jednak omjer svoje površine prema površini kvadrata nad svojim promjerom. Uz pretpostavku da Hipokratu priznamo zaslugu za taj teorem, moramo mu priznati i da je on odgovor na naše pitanje iz naslova.

Naime, on je odredio kvadrature likova koji su njemu u čast dobili ime Hipokratovi mjeseci. To su oni mjeseci – likovi omeđeni lukovima dviju nekoncentričnih kružnica različitih polumjera – koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Danas je poznato da takvih mjeseca ima pet tipova, a dokaz te tvrdnje pripisan je znamenitom švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru (18. stoljeće). Hipokrat je, tako navode izvori, poznavao tri od tih pet tipova i postupak njihove kvadrature. Ovdje ćemo opisati samo najjednostavniji, prvi slučaj, a za ostale zainteresirane čitatelje upućujemo na *web*-stranicu `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/FaultyLuneQuadrature.shtml` .

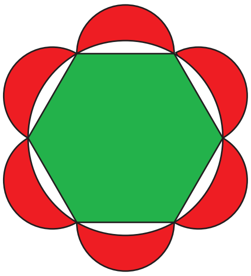
Prvi je Hipokratov mjesec omeđen jednom polukružnicom i jednom četvrtkružnicom. Krenemo li od istokračnog pravokutnog trokuta, spomenuta je polukružnica konstruirana nad njegovom hipotenuzom, a četvrtkružnica ima središte u vrhu uz pravi kut i polumjer jednak kateti. Sa slike 1 vidljivo je: površina mjeseca jednaka je zbroju površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjenom za površinu kružnog isječka koji odgovara četvrtkružnici. Ako krenemo od spomenutog teorema (proporcionalnost površine kruga i kvadrata njegova promjera) zaključujemo da je površina polukruga razmjerna kvadratu hipotenuze, a površina spomenutog isječka je razmjerna – s istom konstantom proporcionalnosti – polovici kvadrata dvostruke katete trokuta (tj. dvostrukom kvadratu katete). Iz Pitagorina



Slika 1. Prvi Hipokratov mjesec

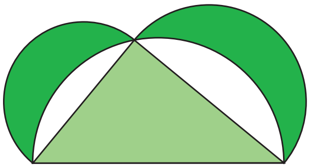
poučka – čiji dokaz je poznat bar jedno 50 godina prije Hipokrata – slijedi da su površine polukruga i isječka jednake, te zaključujemo: mjesec ima istu površinu kao trokut. Kako je trokut lako kvadrirati (razmislite sami kako!), vidimo da je dobivena kvadratura ovog tipa Hipokratova mjeseca.

Neki kažu da je Hipokrat mislio da je svojim kvadraturama mjeseca riješio problem kvadrature kruga, no vjerojatnije je da nije. Oni koji tvrde da jest pozivaju se na sljedeću ideju pripisanu Hipokratu (za koju je lako moguće da su je kasnije dodali komentatori Hipokratova djela): sa slike 2 vidimo da je površina kruga jednaka zbroju površina upisanog mu pravilnog šesterokuta i šest polukrugova nad stranicama tog šesterokuta umanjenom za površine šest mjeseca kao na slici. No, nema dokaza da je Hipokrat tvrdio da se ovi mjeseci mogu kvadrirati.



Slika 2. "Kvadratura" kruga s pomoću šest mjeseca

Za kraj spomenimo još da je Hipokratov prvi mjesec na slučaj općeg pravokutnog trokuta poopćio arapski matematičar Alhazen (Al-Haytham; 10./11. stoljeće). On je pokazao da je svaki pravokutan trokut po površini jednak zbroju površina dvaju mjeseca omeđenih polukružnicama nad katetama i kružnicom nad hipotenuzom (slika 3). Dokaz nije težak te ga za zadaću i zabavu ostavljamo poštovanom čitatelju.



Slika 3. Alhazenovo poopćenje prvog Hipokratova mjeseca

[3] Prvi povijesno pouzdani dokaz te tvrdnje možemo naći u XII. knjizi Euklidovih *Elemenata* (oko 300. g. pr. Kr.), a temelji se na spomenutoj metodi ekshaustije.