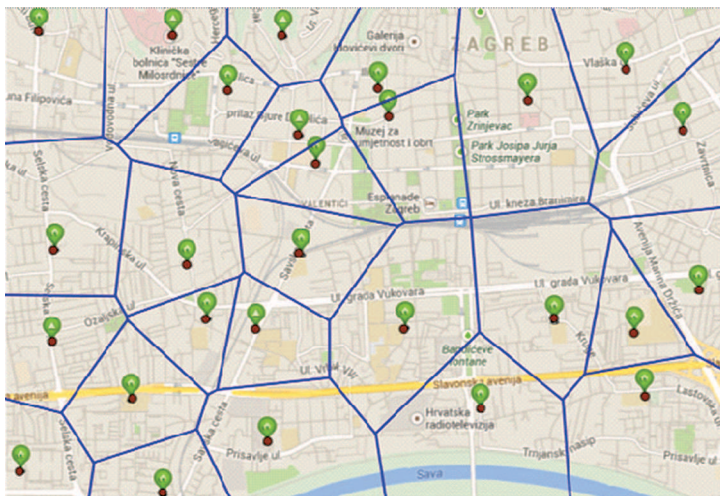


Voronoijev dijagram

Šime Šuljić, Pazin



Slika 1.

Mnogo je učenika koji će najesen krenuti u prvi razred osnovne škole. Njihovi roditelji zacijelo znaju koja im je osnovna škola najbliža i gdje će upisati dijete. U gusto naseljenim gradovima možda će se netko i dvoumiti koja bi škola stvarno bila bliže za njihovo dijete. S druge strane, same škole i nadležni uredi vjerojatno već dugo znaju koje im područje pripada. Ali da ne bi bilo zabune, premrežena karta dijela grada Zagreba na slici 1 nije nikakav službeni dokument. Uz pomoć servisa [Mreža ustanova u sustavu obrazovanja](http://mreza-skola.mzos.hr) (mreza-skola.mzos.hr) i programa [GeoGebra](#) i vi sami možete brzo razgraničiti bilo koji djelić Hrvatske. Ne mora to biti samo mreža škola, možete rasporediti po karti bilo koji broj točaka i dobiti crte koje razdvajaju područja naredbom:

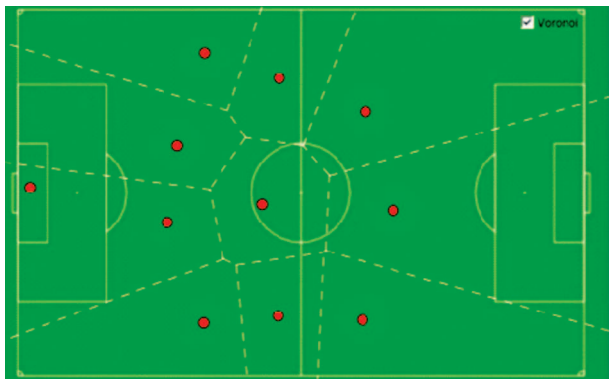
VoronoijevDijagram[A,B,C,D,E,F,...]

Ta naredba svakoj zadanoj točki ravnine, čvoru, pridjeljuje područje ili ćeliju, čije su sve točke bliže svom čvoru nego bilo kojem drugom čvoru.

U trenutku kada Miš iziđe iz tiska već će započeti Svjetsko nogometno prvenstvo i pogled ćete teško moći maknuti od zelenih nogometnih igrališta koja će izbijati s TV ekrana. I nogometaši moraju znati koje je njihovo područje obrane ili napada u svakom trenutku igre. Teško da u tom trenutku oni matematiziraju jer pored svog talenta i osjećaja za prostor, tu su i silni sati treninga za bolju uigranost momčadi. Razmještaj na terenu se zna i momčad zauzima jednu od već razrađenih i dogovorenih for-

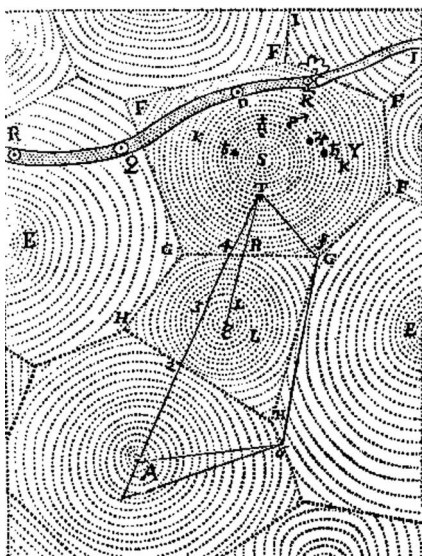
macija: 4-3-3, 4-4-2, 3-5-2... Ipak, nama može biti zanimljivo kako je takvim formacijama teren raspodijeljen, pogotovo zbog toga što su igrači za razliku od škola u gornjem primjeru pomični (slika 2). Interaktivni aplet možete pogledati na adresi ggb-tu.be/122526 i njime raspoređivati igrače kako god to želite.

Voronoijev dijagram nazvan je u čast ukrajinskog matematičara [Georgija Voronoija](#) (1868. – 1908.) ali problem je puno stariji i pripisuje se Descarte-



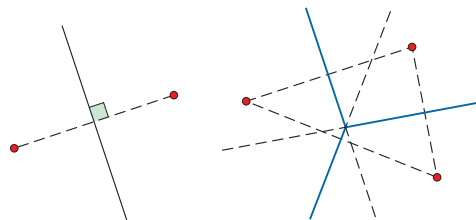
Slika 2.

sovu objašnjavanju **gravitacije** (slika 3). Kako se i Dirichlet bavio ovim grafom, ponekad ga zovu i Dirichletovo popločavanje.

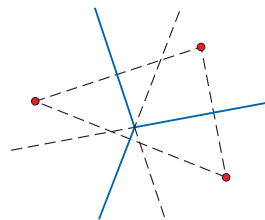


Slika 3.

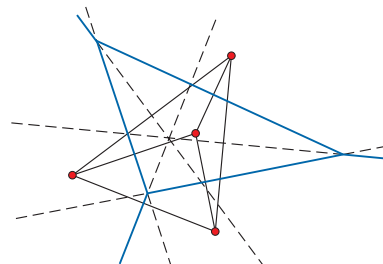
Vjerojatno vam već pada na um kako konstruirati Voronoijev dijagram. Ako imamo samo dva čvora problem je jednostavan, simetrala njihove spojnice razdijelit će ravninu na dva područja (slika 4). Problem je trivijalan ako imamo i niz kolinearnih čvorova. S tri nekolinearna čvora problem ćemo također lako riješiti simetralama, jer će se one sjeći u jednoj točki (slika 5).



Slika 4.



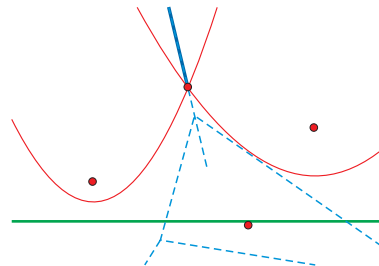
Slika 5.



Slika 6.

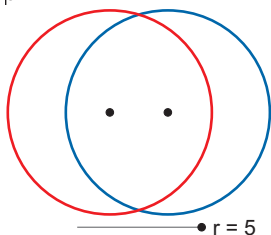
Imamo li četiri točke, problem je već prilično složen. Granice ćelija ići će po simetralama, ali problem postaje odrediti algoritam po kojem će se računalo ponašati u vrlo različitim situacijama (slika 6).

Postoji više računalnih algoritama za konstrukciju Voronoijeva dijagrama. Nama može biti zanimljiv algoritam Stevena Fortune (1987.) jer rabi svojstva parabole. Po definiciji parabola je skup točaka ravnine koje su jednako udaljene od čvrste točke ravnine i ravnalice. Fortune uvodi ravnalicu koja klizi po ravnini i kada prijeđe čvor, pojavljuje se parabola. Sjecište dviju parabola koje je po definiciji jednako udaljeno od obaju čvorova crta liniju razgraničenja. Ovdje će se pojaviti krupan problem uključivanja i isključivanja sjecišta koji se mora riješiti.

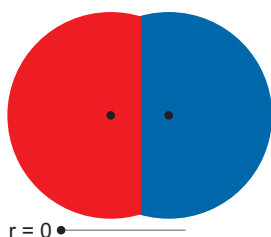


Slika 7.

Kao što je već u uvodu rečeno, Voronijev dijagram možemo dobiti s pomoću gotove GeoGebrine naredbe, ali to ne znači da dijagram ne možete u potpunosti od početka konstruirati bez te naredbe. GeoGebrini kreativci dosjetili su se jednoj jednostavnoj, a vrlo zgodnoj ideji. Konstruiramo dvije kružnice jednakog polumjera, ali im pridijelimo različite boje. Uključimo puštanje traga kružnicama dok polumjer animiramo od njegove najveće vrijednosti k nuli. Boja u područjima ostaje ona koja posljednja "piše".



Slika 8.



Slika 9.

Isto načelo primijenimo za više čvorova koje ćemo sada radi brzine crtati s pomoću GeoGebrine tablice. U ćeliju A1 zadamo središta kružnica koristeći slučajni generator brojeva:

(SlučajniBrojIzmeđu[-5, 5], SlučajniBrojIzmeđu[-4, 4])

Kopirajmo tu ćeliju niže po stupcu. Time nastane čitav niz točaka u grafičkom prozoru. U ćeliju B1 zadajemo kružnicu:

Kružnica[A1, r],

gdje je r unaprijed definirani polumjer. Prije nego kopiramo tu naredbu na ostale ćelije stupca, uređimo dinamične boje te kružnice na kartici *Svojstva* > *Dodatno* ovako: Crvena: $x(A1)$, Zelena: $y(A1)$ i Plava: $\text{random}()$. Time ćemo osigurati

šarolikost boja. Kopirajmo sada sadržaj ćelije B1 na ostale ćelije u stupcu. Još se pobrinimo oko animacije i eto nam šarolikog dijagrama.

Tablica		
A1 $\text{među}[-5, 5]$, SlučajniBrojIzmeđu[-4, 4])		
	A	B
1	$(-5, 4)$	$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$
2	$(5, 1)$	$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$
3	$(0, -4)$	$x^2 + (y + 4)^2 = 16$
4	$(-4, -3)$	$(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$
5	$(-5, 4)$	$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$
6	$(1, 2)$	$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$
7	$(2, 3)$	$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
8	$(4, -3)$	$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Slika 10.



Slika 11.

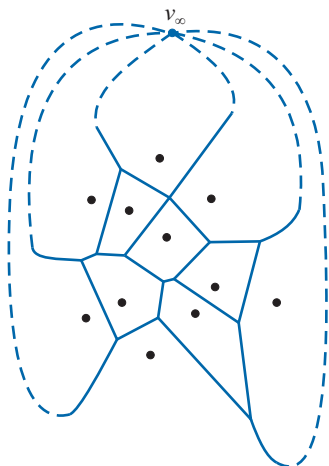
Voronijev graf ima zanimljiva svojstva koja možemo povezati s Eulerovom formulom za poliedre. Ona kaže da za vrhove V , strane S i bridove B vrijedi:

$$V + S - B = 2.$$

Ćelije, ograničene i neograničene, kojih u Voronijevu dijagramu ima koliko i čvornih točaka, možemo poistovjetiti sa stranama poliedra. Bridove, dužine i polupravce tih ćelija možemo poistovjetiti s bridovima, a imamo i vrhove tamo gdje se spajaju tri ili više brida. Potrebno je samo zamisliti da se svi neograničeni bridovi, dakle polupravci spajaju u jednoj točki u beskonačnosti (slika 12), odnosno da postoji plus jedan vrh. Tada formula glasi:

$$(V + 1) + S - B = 2.$$

Konkretno, na slici 12 je 15 vrhova, 11 ćelija i 23 brida, odnosno vrijedi $14 + 11 - 23 = 2$.



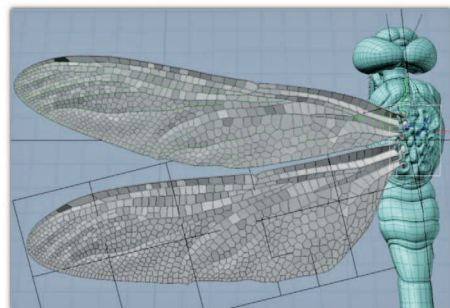
Slika 12.

Uzmemo li u obzir da točno dva vrha određuju jedan brid, a najmanje tri brida jedan vrh, onda vrijedi nejednakost $2B \geq 3V$. Ako sada u formuli $(V + 1) + S - B = 2$ broj strana to jest broj generirajućih točaka zamijenimo s n i uvrstimo ovu nejednakost, dobivamo da je broj bridova $B \leq 3n - 6$, a broj vrhova bez onog u beskonačnosti $V \leq 2n - 5$.

Voronoijevi dijagrami primjenjuju se u kristalografiji, fizici, meteorologiji, geologiji, astronomiji, računalnoj grafici, anatomiji. . . (slika 13).

Vjerojatno vam nije promakla udarna internetska vijest prije nekoliko mjeseci o južnokorejskom zaljubljeniku u brodove, Kimu Hyun-Seoku, koji je dizajnirao po nekima najljepšu mega jahtu na svijetu inspiriran Voronoijevim dijagramima (slika 14).

Kako smo sa Zagrebom počeli, tako ćemo sa Zagrebom i završiti. Projektni studio *Roman Vlahović* na svojim internetskim stranicama www.romanvlahovic.com iznosi rješenje uređenja parka Špansko



Slika 13.

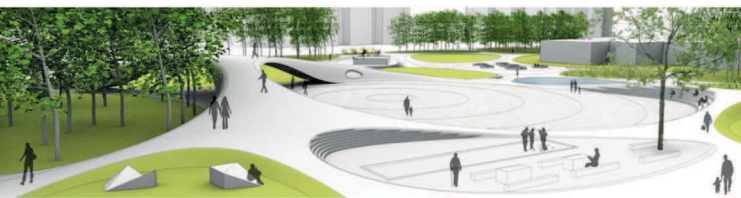


Slika 14.

u Zagrebu (slika 15). Autori projekta kažu: *U projektu za gradski park Špansko kao osnovu koda za stvaranje varijabilnog sustava koristili smo matematički sustav Voronoi. Voronoi dijagram je specifičan način dijeljenja metričke plohe koja je određena udaljenošću objekata na plohi. Svaka točka kontrolira njoj najbliži prostor. Manipulirajući točkama, mijenjamo odnos površina. Preporučam vam da svakako pogledate prekrasne slike i animacije.*

LITERATURA

- 1/ Marc van Kreveld, *Computational Geometry*, Lecture 10: Voronoi diagrams www.cs.uu.nl/docs/vakken/ga/slides7.pdf
- 2/ Swami Sarvottamananda, *Voronoi diagrams*, www.tcs.tifr.res.in/workshop/nitrkligga/workshop.beamer.pdf
- 3/ Wikipedia: Voronoi diagram



Slika 15.