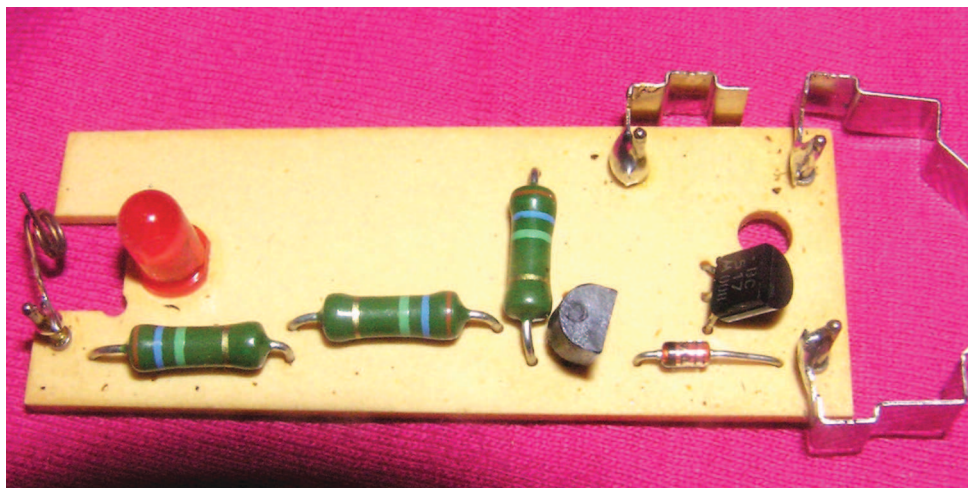


O problemskom zadatku na prvom kolokviju iz *Matematike 1*

na stručnom studiju elektrotehnike Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu

Bojan Kovačić, Zagreb
Kristina Matijević, Požega



U našoj su zemlji u posljednje vrijeme iskazana vrlo pohvalna nastojanja da se u nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama, te u nastavi matematičkih predmeta na fakultetima, veleučilištima i samostalnim visokim školama programom predviđeno gradivo što više povezuje s gradivima drugih predmeta, odnosno kolegija. U srednjoj su školi takva nastojanja intenzivirana od uvođenja državne mature. Time se želi dodatno razbiti tradicionalna potpuno pogrešna predodžba o matematici kao “bauku koji je sam sebi svrhom”, a istodobno i ukazati na mnogobrojne primjene matematike u vrlo različitim područjima ljudskih djelatnosti.

U ovom ćemo članku ukazati na nastojanja da se u okviru nastave matematičkih predmeta na stručnim studijima na veleučilištima i visokim školama u Republici Hrvatskoj obrađuje što više zadataka koji matematičko gradivo povezuju s gradivima drugih predmeta, te analizirati uspjeh bruoša u rješavanju takvih tipova zadataka. Pritom napominjemo da se svi podatci odnose samo na nastavne grupe koje su slušale nastavu kod prvoga autora ovoga članka. Analogni podatci za studente koji su slušali nastavu u ostalim nastavnim grupama, nažalost, nisu dostupni.

Od akademske godine 2012./2013. sastavni dijelovi kolokvija iz dvaju jednosemestralnih matematičkih predmeta na 1. godini stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu su zadatci kojima se matematičko gradivo nastoji povezati s gradivom koje studenti usporedno uče na drugim predmetima. Na svakom kolokviju zadaje se točno jedan takav zadatak. Kolokviji su eliminatornoga tipa, što znači da student koji ne položi prvi kolokvij nema pravo pristupiti polaganju drugoga kolokvija. Zbog toga su ukupni brojevi pristupnika na svakom pojedinom kolokviju u pravilu međusobno različiti prirodni brojevi.

U 1. semestru stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu studenti kao obavezan predmet slušaju *Matematiku 1* s ukupnim fondom od 90 nastavnih sati. U sklopu nastave iz toga predmeta se, s manjim ili većim proširenjima, ponavlja matematičko gradivo koje se predaje u gimnazijama i četverogodišnjim srednjim tehničkim školama (kompleksni brojevi, vektori, realne funkcije jedne realne varijable, osnove diferencijalnoga računa). Iako bi se moglo pretpostaviti da je veći dio toga gradiva studentima dobro poznat iz srednje škole, pa veću pozornost posvetiti "nadogradnji" toga gradiva, iskustva iz prakse pokazuju suprotno, tj. izostavljanje ponavljanja srednjoškolskoga gradiva povlači bitno slabiji uspjeh studenata na kolokvijima i pismenim ispitima. Ovdje ne želimo otvarati raspravu na temu načina, odnosno ishoda učenja matematike u svim fazama obrazovanja. Međutim, želimo izraziti nadu da će većina učenika i studenata u dogledno vrijeme drastično izmijeniti svoj pristup učenju matematičkoga gradiva i učenju općenito, odnosno da će prihvatiti matematiku kao važan sastavni dio svoje svakodnevnice, te matematička znanja shvaćati kao neizostavni dio svoje opće kulture. Također, nadamo se da će se i ubuduće što više inzistirati na međusobnom povezivanju znanja iz različitih područja ljudskoga djelovanja jer, prema našem uvjerenju, jedino tako naši učenici i studenti po završetku svojega srednjoškolskoga, odnosno visokoškolskoga obrazovanja imaju mogućnost postati istinski stručnjaci u području kojim se budu bavili.

U akademskoj godini 2012./2013. na 1. kolokviju iz predmeta *Matematika 1* bio je postavljen sljedeći problemski zadatak¹.

Zadatak 1. Spojimo li tri otpornika serijski, dobit ćemo otpor od $20\ \Omega$. Ako se prva dva otpornika spoje serijski, dobije se otpor jednak otporu trećega otpornika, a ako se spoje paralelno, dobije se otpor od $0.9\ \Omega$. Odredite otpore svih triju otpornika.

* * *

Ovim zadatkom nastojalo se povezati matematičko gradivo s gradivom iz predmeta *Osnove elektrotehnike 1* koji se, zajedno s predmetom *Matematika 1*, smatra bazičnim predmetom na 1. godini stručnoga studija elektrotehnike. U trenutku polaganja 1. kolokvija iz *Matematike 1* studenti su iz predmeta *Osnove elektrotehnike 1* obradili nastavne cjeline *Električni otpor* i *Ohmov zakon*. Valja napomenuti da se iste nastavne cjeline, ali u manjem opsegu, obrađuju u nastavi fizike u gimnazijama i svim srednjim tehničkim školama.

Rješenje Zadatka 1. Označimo nepoznate vrijednosti otpora otpornika redom s R_1 , R_2 i R_3 . Iz podatka da se serijskim spajanjem otpornika dobiva otpor od $20\ \Omega$ zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 20. \quad (1)$$

Iz podatka da se serijskim spajanjem prvih dvaju otpornika dobiva otpor jednak otporu trećega otpornika zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$R_1 + R_2 = R_3. \quad (2)$$

Iz podatka da se paralelnim spajanjem prvih dvaju otpornika dobiva otpor od $0.9\ \Omega$ zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{0.9}. \quad (3)$$

Jednakosti (1), (2) i (3) tvore sustav triju jednadžbi s trima nepoznanicama. Uvrstimo li jednadžbu (2) u jednadžbu (1), dobivamo

$$R_3 + R_3 = 20,$$

a odatle je $R_3 = 10$. Jednadžbu (3) zapišemo u obliku

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = \frac{10}{9}, \quad (4)$$

odnosno, zbog jednadžbe (2), u obliku

$$\frac{R_3}{R_1 \cdot R_2} = \frac{10}{9}. \quad (5)$$

Budući da je $R_3 = 10$, iz jednadžbe (5) slijedi

$$R_1 \cdot R_2 = 9. \quad (6)$$

¹ Navodimo tekst i rješenje zadatka iz jedne ispitne skupine. Ostale ispitne skupine sadržavale su zadatak jednak do na numeričke podatke.

Iz jednadžbi (2) i (6), te jednakosti $R_3 = 10$, primenom Vièteovih formula zaključujemo da su vrijednosti R_1 i R_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$R^2 - 10 \cdot R + 9 = 0. \quad (7)$$

Odavde je $R_1 = 1$ i $R_2 = 9$, pa su traženi otpori 1Ω , 9Ω i 10Ω (odnosno 9Ω , 1Ω i 10Ω).

Napomena 1. Sustav jednadžbi

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 10 \\ R_1 \cdot R_2 = 9 \end{cases}$$

moguće je riješiti i bez korištenja Vièteovih formula tako da se iz prve jednadžbe izrazi jedna od nepoznanica, npr. R_2 i uvrsti u drugu jednadžbu. Tako se opet dobije jednadžba (7), a samim tim i ista rješenja zadatka.

Napomena 2. U srednjoškolskoj nastavi fizike se navodi da je rezultatni otpor R dobiven paralelnim spajanjem dvaju otpornika čiji su otpori R_1 i R_2 dani izrazom $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Tako zapravo jednadžbu (3) odmah možemo zapisati kao

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.9.$$

Korištenjem ovoga izraza ne mijenja se postupak rješavanja zadatka jer, nakon što odredimo $R_1 + R_2 = R_3 = 10$, iz gornje jednakosti ponovno slijedi $R_1 \cdot R_2 = 9$.

Statistički pokazatelji riješenosti ovoga zadatka navedeni su u Tablici 1.

Tablica 1. Statistički pokazatelji riješenosti Zadatka 1.

Broj pristupnika	Broj pristupnika koji su ispravno modelirali zadatak	Broj pristupnika koji su točno riješili zadatak
35	8	3
Postotak	22.86 %	8.57 %

² Gradivo koje se odnosi na Cramerove sustave bilo je sastavni dio kolokvijskoga gradiva, pa su slijedom te činjenice pristupnici očekivali matematički model u kojemu se pojavljuje Cramerov sustav.

³ Vidjeti Bilješku 1.

Napominjemo da se pod pojmom "ispravno (matematičko) modeliranje zadatka" podrazumijeva dobivanje sustava jednadžbi (1)–(3). Istaknimo da je tipičan komentar studenata koji su ispravno modelirali zadatak, ali ne i potpuno točno ga riješili bio parafrazirano ovakav: "Dobio sam jednadžbe (1) i (2), ali kad sam dobio jednadžbu (3), nisam znao što dalje napraviti jer sustav nije Cramerov."²

U akademskoj godini 2013./2014. problemski zadatak na 1. kolokviju iz *Matematike 1* bio je sljedeći³.

Zadatak 2. Ako se tri otpornika spoje paralelno, dobiva se otpor od 50Ω . Ako se prva dva otpornika spoje paralelno, pa se treći potom spoji serijski s njima, dobiva se otpor od 200Ω . Ako se drugi i treći otpornik spoje paralelno, pa se prvi potom spoji serijski s njima, dobiva se otpor od 360Ω . Koliki se otpor dobiva ako se sva tri otpornika spoje serijski?

Rješenje Zadatka 2. Označimo nepoznate vrijednosti otpora otpornika redom s R_1 , R_2 i R_3 . Iz podatka da se paralelnim spajanjem otpornika dobiva otpor od 50Ω zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{50}. \quad (8)$$

Spojimo li prva dva otpornika paralelno, dobivamo otpor $R_4 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$. Taj otpor serijski spojimo

s trećim otpornikom dobivajući rezultatni otpor od 200Ω . Stoga zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3 = 200. \quad (9)$$

Analogno, iz podatka da se serijskim spajanjem prvoga otpornika i otpora dobivenoga paralelnim spajanjem drugoga i trećega otpornika dobiva otpor od 360Ω zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} + R_1 = 360. \quad (10)$$

Jednakosti (8)–(10) tvore sustav triju jednadžbi s trima nepoznicama. Iz jednadžbe (8) izrazimo zbroj $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{50} - \frac{1}{R_3}. \quad (11)$$

Uvrstimo li jednakost (11) u jednadžbu (9), dobit ćemo jednadžbu s jednom nepoznicom (R_3). Riješimo tu jednadžbu. Imamo redom:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{50} - \frac{1}{R_3}} + R_3 &= 200 \\ \frac{50 \cdot R_3}{R_3 - 50} + R_3 &= 200 \quad / \cdot (R_3 - 50) \\ 50 \cdot R_3 + R_3^2 - 50 \cdot R_3 &= 200 \cdot R_3 - 10\,000 \\ R_3^2 - 200 \cdot R_3 + 10\,000 &= 0 \\ (R_3 - 100)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Odatle slijedi $R_3 = 100$. Analogno, iz jednadžbe (8) izrazimo zbroj $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$:

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{50} - \frac{1}{R_1}, \quad (12)$$

pa uvrštavanjem jednakosti (12) u jednadžbu (9) i primjenom maloprijaznjih transformacija naposljetku dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$R_1^2 - 360 \cdot R_1 + 18\,000 = 0. \quad (13)$$

Rješenja te jednadžbe su $(R_1)_1 = 60$ i $(R_1)_2 = 300$. Ako bi bilo $R_1 = 60$, onda bi, zbog $R_3 = 100$, iz jednadžbe (7) slijedilo

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{50} - \frac{1}{60} - \frac{1}{100}} = -150,$$

što je nemoguće jer otpor otpornika nužno mora biti nenegativan realan broj⁴. Tako je $R_1 = 300$, pa iz jednadžbe (8) lako dobivamo $R_2 = 150$. Stoga se serijskim spajanjem svih triju otpornika dobiva otpor jednak:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 550 \, \Omega.$$

Iako je objektivno matematički model u Zadatku 2. (tj. sustav jednadžbi (8)–(10)) bitno teži za rješavanje od matematičkoga modela u Zadatku 1., pretpostavljali smo da će približno jednak broj studenata znati ispravno matematički modelirati zadatak. Međutim, pripadni statistički pokazatelji navedeni u Tablici 2. opovrgnuli su tu pretpostavku.

Tablica 2. Statistički pokazatelji riješenosti Zadatka 2.

Broj pristupnika	Broj pristupnika koji su ispravno modelirali zadatak	Broj pristupnika koji su točno riješili zadatak
78	4	2
Postotak	5.13 %	2.56 %

Ovdje treba posebno istaknuti činjenicu da dvočlani skup pristupnika koji su točno riješili zadatak tvore student-prijelaznik s FER-a i student koji je u akademskoj godini 2013./2014. ponovno upisao predmet *Matematika 1*. Četveročlani skup svih pristupnika koji su ispravno modelirali zadatak (tj. dobili sustav jednadžbi (7)–(9)), osim navedene dvojice studenata, tvore još dva studenta koji su u akademskoj godini 2013./2014. ponovno upisali predmet *Matematika 1*. Dakle, nitko od pristupnika koji su u akademskoj godini 2013./2014. prvi put upisali predmet *Matematika 1* nije znao ispravno modelirati zadatak, a samim time niti točno ga riješiti. Tipičan komentar većine pristupnika vezan uz zadatak bio je: “Uopće nisam znao odakle početi.”

Iako gore navedeni rezultati mogu djelovati prilično obeshrabrujuće i demotivirajuće za nastavnike, mišljenja smo da, unatoč njima, treba nastaviti sa započetom praksom što jačega povezivanja matematike s drugim predmetima, odnosno, općenito, znanstvenim područjima, i to – po mogućnosti – što više u samoj nastavi matematike. Jedino se na taj način može očekivati postizanje značajno boljih rezultata učenika i studenata u rješavanju matematičkih zadataka iz svakodnevnice prakse.

⁴ U elektrotehnici postoje i tzv. negativni otpori, ali se o njima nešto više govori tek na višim godinama studija. Stoga se smatra da u trenutku polaganja 1. kolokvija iz *Matematike 1* studenti nisu upoznati s tim pojmom.