

Tko je prvi koristio znakove $\cdot$ i $:$?



Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Razmišljajući bi li bilo prikladnije u drugom nastavku matematičkih “prvotarija” pisati o prvoj uporabi nekog pojma ili prvom dokazu nekog teorema, zaključila sam: Ako smo u prvom pisali o znakovima za zbrajanje i oduzimanje, ipak bi logičnije bilo odmah potom reći ponešto i o znakovima za množenje i dijeljenje.

Danas smo navikli množenje označavati povišenom točkom ili pak nadopisivanjem (koje je – kako u prošlom nastavku rekosmo – nekad davno često predstavljalo zbrajanje), a ponekad (Andrijinim) križem $\times$.¹ Potonji znak stariji je znak za množenje od povišene točke, ali ga se danas u našim krajevima, prilično u duhu Leibnizove izjave, uglavnom izbjegava. Gottfried Wilhelm Leibniz, najpoznatiji kao jedan od “otaca” infinitezimalnog računa, naime je u jednom pismu Johannu Bernoulliju, datiranom 29. lipnja 1698., napisao: “Ne volim $\times$ kao znak za množenje, jer ga je lako pobrkati sa x . . .”. Ostatom pisma on postaje prvi koji zagovara povišenu točku umjesto znaka $\times$: “. . . često povezujem dvije veličine jednostavno umetnutom točkom i množenje označavam $ZC \cdot LM$. Poslijedično, za

označavanje omjera koristim se ne jednom, nego dvjema točkama, kojima se koristim i za dijeljenje.” Vidimo stoga: znakove $\cdot$ i $:$ za množenje i dijeljenje prvi je zagovarao Leibniz pred malo više od 300 godina. No, dok se za zbrajanje i oduzimanje danas gotovo nitko u zapadnom svijetu ne koristi drugim znakovima nego $+$ i $-$, za množenje i dijeljenje znakovi nisu posve ujednačeni. Štoviše, Leibniz nije čak ni prvi koji je množenje označavao s $\cdot$ i dijeljenje s $:$. Neki autori također navode da Leibnizova točka nije bila povišena, nego jednostavno umetnuta, kao u **ZC.LM** (i da ju je tako koristio već 1694.). Bilo kako bilo, znak $\cdot$ za množenje i $:$ za dijeljenje u kontinentalnoj Europi se više-manje ustalio tijekom 18. stoljeća.

¹ Podsjećamo, danas se znakom $\times$ u matematici koristimo i kao oznakom vektorskog produkta dvaju geometrijskih vektora i kao oznakom Kartezijeva produkta dvaju skupova.

Andrijin križ je, kako već rekosmo, stariji znak za množenje od točke. Korištenje Andrijina križa kao znaka za množenje vjerojatno je potaknuto renesansnim standardnim načinom množenja (sličnim onome kakvoga opisuje vedaska matematika). Prvi se njime, čini se, koristio engleski matematičar William Oughtred oko 1630. godine (Oughtred je u povijesti najpoznatiji kao autor logaritmara).² Često se navodi da se gotovo u isto doba, točnije 1631., engleski znanstvenik Thomas Harriot koristio točkom za množenje, no iako se ona stvarno pojavljuje u nekim izrazima koje je zapisao, nije sigurno da se njome stvarno koristio kao znakom za množenje. Čak i ako se Harriot stvarno koristio povišenom točkom kao znakom za množenje, sigurno je da se nije proširila dok se Leibniz nije počeo njome koristiti. Prije križa i točke množenje se označavalo na različite načine, primjerice slovom M (M. Stifel,³ 1545., kao i neki kasniji autori) ili riječju *in* (François Viète krajem 16. stoljeća). Naznaka množenja nadopisivanjem može se pak naći kako u Indiji oko 8. – 10. stoljeća, tako i u nekim europskim rukopisima tijekom 15. i 16. stoljeća (spomenuti M. Stifel je primjerice 1533. zapisivanjem slova više puta naznačavao potenciranje: njegov **IAAA** bismo danas zapisali kao A^3). Prije nego se posvetimo oznaci dijeljenja, spomenimo i da su se tijekom 17. stoljeća upotrebljavali još neki simboli množenja, primjerice zvjezdica $*$ (J. Rahn,⁴ 1659.), pravokutnik (P. Hérigone,⁵ 1644.). . .

Što se dijeljenja tiče, nakon što je Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci, 1202. u svom djelu *Liber abaci* uveo razlomačku crtu, ona je dugo ostala u upotrebi kao znak za dijeljenje. Tijekom 16. stoljeća dijeljenje se označavalo desnom zagradom. Tako

je Stifel 1544. pisao **8)24** za ono što bismo mi danas pisali $24 : 8$. Čini se da je to bio prvi novi znak za dijeljenje nakon razlomačke crte i njime su se koristili i drugi europski autori, kako u toj varijanti, tako i u varijanti **8)24(**. Tijekom 19. stoljeća u Sjedinjenim Američkim Državama dijeljenje u opisima postupka pisanog dijeljenja često se bilježilo s pomoću dvije zagrade. Primjerice, **7)12 096(1728** značilo je $12\,096 : 7 = 1728$. Kao zanimljivost navedimo i da je u udžbeniku Franje Steindla,⁶ *Institutiones Arithmeticae in usum Gymnasiorum et Scholarum Grammaticarum per Regnum Hungariae et Provincias eodem adnexas* (1778.), prvom udžbeniku koji je objavljen nakon reforme obrazovanja u Austro-Ugarskoj Monarhiji i koji je više od 50 godina ostao standardni gimnazijski udžbenik u ugarskom dijelu Monarhije, dakle i u Hrvatskoj, uz tad već prilično standardno označavanje dijeljenja s $A : B = C$ korištena i notacija **B(A)C**. Čini se da je to potpuno originalna Steindlova notacija, odnosno nije poznato da ju je itko drugi koristio.

U 17. je stoljeću Rahn, možda pod utjecajem engleskog matematičara Johna Pella, koristio znak $\div$ (*obelus*) za dijeljenje. Dok se u kontinentalnoj Europi nakon Leibniza kao znak za dijeljenje uvriježio $:$, u anglosaksonskom je svijetu čak i danas standardan $\div$. Kako kaže Florian Cajori, autor najpoznatijeg pregleda povijesti matematičke notacije (*A history of mathematical notation*, 1928./29.) “Možda ne postoje simboli koji toliko potpuno odražavaju političke granice kao što su to $\div$ i $:$. Prvi pripada Velikoj Britaniji, britanskom Dominionu i Sjedinjenim Državama. Drugi pripada kontinentalnoj Europi i zemljama Latinske Amerike”.

² Zapravo, prva pojava znaka $\times$ seže u 1618., kad se pojavljuje u anonimnom prilogu prijevoda jednog djela Johna Napiera, no smatra se da je taj prilog napisao W. Oughtred.

³ Michael Stifel, 1487. – 1567., njemački redovnik i matematičar, prvi je uveo naziv “eksponent”, neke nove matematičke oznake, a poznat je i kao prethodnik uvođenja logaritama.

⁴ Johann Rahn, 1622. – 1676., švicarski matematičar, najpoznatiji po uvođenju znaka $\div$ za dijeljenje i $\therefore$ za implikaciju (kao npr. u $x = 6 - 1 \therefore x = 5$).

⁵ Pierre Hérigone, 1580. – 1643., francuski matematičar i astronom, uveo je različite matematičke oznake od kojih se neke i danas koriste (primjerice $\perp$ za okomitost).

⁶ Franjo Steindl, 1746. – 1818., rođen u Križevcima, isusovac obrazovan u Grazu, predavao je matematiku na sveučilištima u Zagrebu i Budimpešti. Njegovi su udžbenici iz aritmetike i geometrije bili vrlo popularni u ugarskom dijelu Monarhije sve do sredine 19. stoljeća.

55. Državno natjecanje iz matematike

Šibenik, 2.-4. travnja 2014.



