Prelazak
sa zbrajanja prirodnih na zbrajanje cijelih brojeva

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

Matematički koncepti se učenicima mogu i trebaju približiti kroz razne modele. Primjerice, pojam razlomka se može približiti učenicima kroz kružni model, model pravokutnika, model količine, dužine i sl. U udžbenicima je često prisutan samo jedan model ili samo neki modeli koji prikazuju određeni pojam. Upravo prilaženje pojmu kroz što više različitih modela daje mogućnost boljeg usvajanja određene matematičke ideje. Naravno, ponekad i dani kontekst u tekstualnim zadatcima sugerira ili određuje model koji je prikladan za rješavanje tog matematičkog zadatka. U ovom tekstu bit će riječi o modelima zbrajanja prirodnih i cijelih brojeva te o nekim problemima i zabludama koje se mogu javiti u slučaju dominacije samo jednog modela.

Modeli prirodnih brojeva

Da bismo prikazali i razumjeli zbrajanje prirodnih brojeva na modelima, prvo treba same prirodne brojeve prikazati s pomoću modela: to je *model skupa* i *model brojevnog pravca*. *Model skupa* odnosi se na kardinalni broj promatranog konačnog skupa elemenata. To je model koji se koristi za uvođenje pojma prirodnih brojeva u svakom početnom učenju matematike. Kroz konkretni materijal i slike učenici proučavaju količinu i usvajaju pojmove 1, 2, 3, 4 itd.

Model brojevnog pravca za prirodne brojeve se odnosi na pravac kojem je određena jedinična dužina i s pomoću koje su prirodnim brojevima pridružene određene točke pravca. Ovaj pristup zahtijeva viši stupanj apstrakcije od konkretnih materijala u skupovnom modelu. Stoga je korisno ovaj model pravca prikazati prvo nizanjem predmeta poput npr. računske gusjenice (Herjavec i Glasnović Gracin, 2010.), a tek kasnije pridruživanjem prirodnih brojeva točkama pravca.

Kod oba modela prisutne su aktivnosti prebrojavanja: prebrojavanje elemenata danog skupa i pre-

brojavanje elemenata u nizu. Pritom dijete primjećuje razne zanimljivosti, poput, primjerice, da se broj elemenata skupa ne mijenja ako promijenimo položaj elementima unutar skupa, kroz model brojevnog pravca uči odnose "između, iza, ispred" i sl. Za skupovni model koristimo razne materijale koji predstavljaju elemente skupa poput kocaka, žetona, zrnja, jabuka, kružića i sl. Za model brojevnog pravca možemo koristiti ravnalo, krojački metar, termometar, računsku gusjenicu, nanizane predmete i sl.

Modeli zbrajanja prirodnih brojeva

Nakon upoznavanja s pojmom prirodnog broja, dijete se upoznaje s pojmom zbrajanja brojeva prvo kroz skupovni model, a zatim i na modelu brojevnog pravca.

Skupovni model slijedi ideju kardinaliteta unije disjunktnih skupova. Ako skup A ima a elemenata, a skup B ima b elemenata, te A i B nemaju zajedničkih elemenata, onda skup $A \cup B$ ima $a + b$ elemenata. Izraz $a + b$ naziva se zbroj brojeva a i b, a a i b se nazvaju pribrojnici.

$$k(A \cup B) = k(A) \cup k(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

Primjer. *Ivana ima 5 jabuka, a Ana dvije. Sve svoje jabuke su dale Marku. Koliko su jabuka dale Marku?*

Ovaj model je pogodan za početnu nastavu matematike i za uvođenje i shvaćanje skupa prirodnih brojeva, ali, s obzirom na to da se zasniva na kardinalnom broju, ne može se primijeniti kasnije na skupu cijelih ili racionalnih brojeva. Zato ovaj model ne bi smio biti jedini koji učenike uvodi u svijet brojeva.

Na *modelu brojevnog pravca* zbrajanje možemo shvatiti na dinamičan način. To znači da se jedna vrijednost uveća za određeni broj jedinica. Pomak na horizontalnom brojevnom pravcu događa se udesno, ili prema gore na termometru, što se zgodno može prikazati dinamičnim softverima.

Primjer. *Ana je visoka 142 cm. Preko ljeta je narasla još za 3 cm. Kolika je njena visina nakon ljeta?*

Model brojevnog pravca, iako apstraktniji od skupovnog, pogodan je za proširivanje skupa prirodnih brojeva na skupove $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$. Stoga je pogodan i za prikazivanje zbrajanja na tim skupovima. Za razliku od skupovnog modela, ovaj model je pogodan za proširivanje prikaza zbrajanja i oduzimanja sa skupa prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva.

Tipovi tekstualnih zadataka sa zbrajanjem

U primjerima iz raznih radnih materijala često možemo vidjeti da se nažalost ne promišlja koji model zbrajanja je pogodan za pojedini tekstualni zadatak. Skupovni model se treba primijeniti na tekstualne zadatke u kojima kontekst nalaže da se dva skupa spajaju u treći. S druge strane, model brojevnog pravca je zgodno primijeniti kada se radi o promjeni jedne te iste veličine. Ovakva promišljanja u odabiru modela uvelike pomažu učenicima lakše doći do rješenja zadatka, ali i shvatiti zbrajanje i kao uniju i kao promjenu na pravcu. Iz tog razloga je važno poznavati i tipove tekstualnih zadataka vezanih uz zbrajanje.

Mnogi su se autori bavili vezom konteksta zadatka i zbrajanja. Nemoguće je pritom zaobići pojam *Grundvorstellung* koji potječe iz njemačke metodike matematike. Radi se o mentalnim objektima koji posreduju između realnosti i matematike (vom Hofe, 1995.). Kod zadataka riječima prijelaz sa situacija iz svakodnevice u svijet matematike učenicima može zadavati problem i zato je potrebno pronaći mentalne slike koje će nam u tome pomoći. Dakle, i tu se govori o modelima, ali u užem smislu, tj. kao poveznici između svakodnevice i matematike, ovisno o tekstu zadatka. Vom Hofe naglašava da se isti matematički pojam (npr. zbrajanje $2 + 3$) može prikazati različitim mentalnim objektima:

- *Iva ima 2 jabuke, Ana ima 3 jabuke. Koliko jabuka imaju zajedno?* Ovo je tzv. "primjer kombinacije" u kojem dva stanja doprinose novom stanju (skupovni model).

- *Iva ima 2 jabuke i dobila je još 3. Koliko jabuka sada ima Iva?* Ovo je tzv. "primjer dodavanja" jer se stalno promatra jedna vrijednost (broj jabuka koje ima Iva). Početno stanje se mijenja i dobiva se konačno stanje (brojevni pravac ili niz).

- *Iva je prvo od oca dobila 2 kn, a zatim od majke još 3 kn. Koliko je novaca tako ukupno dobila od roditelja?* Ovo je tzv. "primjer promjene" jer se opet radi o jednoj te istoj vrijednosti koja je isprva bila 0, zatim se popela na 2 te se popela još za 3 (brojevni pravac).

I drugi autori su se bavili tekstualnim zadatcima sa zbrajanjem. Riley i Greeno (1988., prema Pavlin-Bernardić, Rovan i Vlahović-Štetić, 2011.) u ovom smislu razlikuju tri vrste zadataka: zadatke kombiniranja, promjene i usporedbe. Zadatak kombiniranja se odnosi na uniju dvaju disjunktnih skupova i odgovara primjeru kombinacije od vom Hofea. Zadatak promjene odgovara drugom primjeru kod vom Hofea i prikladan je za prikaz na brojevnom pravcu ili, u slučaju prirodnih brojeva, za nizanje. Zadatak usporedbe se odnosi na usporedbu dviju veličina i traženju razlike među njima te nije direktan predmet teme ovog članka.

Evo nekih primjera tekstualnih zadataka sa zbrajanjem:

Tekstualni zadatak	Prikladni model
Ivan u torbi ima dvije knjige, a Ana tri. Koliko knjiga zajedno imaju u svojim torbama?	Skupovni
Ivan ima tri godine, a Ana pet godina više od Ivana. Koliko godina ima Ana?	Niz, brojevni pravac
Ivan ima dvije jabuke, a Ana mu je dala još tri. Koliko Ivan sada ima jabuka?	Niz, brojevni pravac
Žabica skače travnjakom kao na slici. *Da bi došla do prvog kamena trebaju joj 3 skoka, a nakon toga joj do drugog kamena treba još pet skokova. Koliko je skokova žabica napravila od početnog položaja do drugog kamena? Dopuni sliku i odgovori.*	Brojevni pravac
Na livadi je 16 ivančica i 5 maslačaka. Koliko je ukupno maslačaka i ivančica na toj livadi?	Skupovni
Temperatura je ujutro iznosila 4 °C. Do podneva je narasla još za 3 stupnja. Kolika je temperatura bila u podne?	Brojevni pravac
Na travnjaku je izraslo 16 tratinčica, a maslačaka je za 5 više nego tratinčica. Koliko je ukupno maslačaka i tratinčica na tom travnjaku?	Kombinacija oba modela

Ovakvi zadatci predstavljaju odličnu vježbu studentima, budućim nastavnicima, za promišljanje o pogodnom modelu. Osim čitanja danih zadataka korisno je i sastavljati svoje zadatke riječima i tražiti pogodan model pri prikazu zadatka i rješenja. To

će im pomoći da sutra u razredu pravilno biraju modele i strategije rješavanja matematičkih problema.

Modeli cijelih brojeva

Sada kad smo se prisjetili modela prirodnih brojeva i zbrajanja u $\mathbf{N}$, krenimo i korak dalje, prema skupu cijelih brojeva. Model brojevnog pravca se lijepo uklapa u prikaz cijelih brojeva (tako se i uvodi, primjerice, na termometru). No, model skupa, odnosno njegovog kardinalnog broja, koji je igrao važnu ulogu kod prirodnih brojeva, nije više pogodan za negativne cijele brojeve. Preko ove činjenice ne smijemo samo prijeći već je treba prokomentirati s učenicima, jer neki učenici možda poznaju samo skupovni model i samo njega povezuju s pojmom broja. Za prikaz cijelih brojeva prikladni su modeli:

- s pomoću žetona ("topli" i "hladni" žetoni, crveni i plavi žetoni, plus-žetoni i minus-žetoni i sl.)
- s pomoću brojevnog pravca.

Prikaz negativnih brojeva s pomoću žetona je nadogradnja skupovnog modela kojem sada dodajemo još jednu "dimenziju". Naime, kod prirodnih brojeva nam je bio važan samo broj elemenata skupa, a sada gledamo i "naboj" tih elemenata koji može biti pozitivan ili negativan. Zato je jako korisno od prvog do petog razreda za model skupa prirodnih brojeva koristiti samo crvene žetone kao jedinice da se učenici naviknu na njih, a u šestom razredu uvesti i plave žetone kao primjer negativnih jedinica. Također je na crvene žetone korisno napisati $\oplus$, a na plave $\ominus$.

Model brojevnog pravca za prikaz cijelih brojeva očituje se kroz razne situacije iz svakodnevice, npr. termometar za temperaturu zraka, stanje na računu, vodostaj, nadmorska visina i sl. Ne zaboravimo pritom da se nalazimo u skupu cijelih brojeva te da na ovim skalama izbjegavamo decimalne brojeve. Inače, ovaj se model pokazuje pogodnim već kod oduzimanja u skupu $\mathbf{N}$ jer s pomoću njega i u razrednoj nastavi znatiželjnim učenicima možemo pokazati koliko bi bilo, primjerice, $2-3$. Taj primjer zorno možemo prikazati zadatkom iz svakodnevice gdje se, primjerice, temperatura od 2 °C spustila za 3 °C.

Modeli zbrajanja cijelih brojeva

Zbrajanje cijelih brojeva prikazujemo na modelu brojevnog pravca te s pomoću pozitivnih i negativnih žetona. Opet je, ovisno o kontekstu i pitanju zadatka, potrebno promisliti koji model je prikladniji za određeni zadatak. Kod zbrajanja žetonima prvo pravilo je da se jedan pozitivan i jedan negativan žeton "poništavaju".

Primjer. *Temperatura zraka je ujutro iznosila* -2 °C, *a do podneva je narasla za* 4 °C. *Koliko je iznosila temperatura zraka tog dana u podne?*

Promjene temperature pogodno je prikazivati na skali termometra, tj. na brojevnom pravcu. Vježba i snalaženje s cijelim brojevima dobro će nam pomoći za kasnije upoznavanje racionalnih brojeva na brojevnom pravcu i računanje s njima.

Primjer. *Luka i Maja su pronašli računalnu igru za vježbanje računanja s cijelim brojevima. Igra se zove "Topli i hladni žetoni". U lonac se dodaju ili se iz njega uzimaju topli i hladni žetoni. Dodavanjem*

jednog toplog žetona temperatura u loncu se povisi za 1 °C*, a dodavanjem jednog hladnog žetona temperatura se snizi za* 1 °C*.*

S pomoću ove igre objasni zbrajanje $-7+3=-4$

(Izvor: Petica 6, Kralj i sur., 2007.).

Primjer. *Ivan je dugovao Luki jednu kunu, a zatim je od njega posudio još 4 kn. Koliko kuna nakon toga Ivan duguje Luki?*

Ovaj primjer $-1+(-4)=-5$ se može prikazati na brojevnom pravcu, ali s obzirom na to da se radi o diskretnim jedinicama (cijelim kunama), zgodno ih je prikazati i s pomoću plavih žetona, koji označavaju dug.

Primjer. *Mama je bila u minusu 3000 kn na računu, a zatim joj je na taj račun sjela plaća od 5000 kn. Koliko je stanje na njenom računu nakon plaće?* Stanje na računu i promjena tog stanja prikladni su za model brojevnog pravca, $-3000+5000=2000$. Ovaj zadatak pojednostavljeno možemo prikazati i s pomoću "crvenih i plavih novčanica" od 1000 kn.

Važno je napomenuti da je primjena modela pri zbrajanju cijelih brojeva dobar način i za poticanje procjene hoće li zbroj biti pozitivan ili negativan broj.

Prijelaz s modela zbrajanja prirodnih brojeva na model zbrajanja cijelih brojeva

Često se prijelaz s poznatog skupa $\mathbf{N}$ na novi skup $\mathbf{Z}$ ili $\mathbf{Q}$ radi automatski i podrazumijeva se da će učenik s lakoćom prihvatiti novosti koje nosi novi skup. Nažalost, često nove stvari iz novog skupa brojeva čine misaone prepreke koje učenicima stvaraju teškoće za razumijevanje novih pojmova. Tako se nastavničko *podrazumijevanje* lako može pretvoriti u učeničko *nerazumijevanje*. Zato trebamo biti svjesni prepreka koje nosi skup $\mathbf{Z}$ i zbrajanje u njemu u odnosu na poznati skup $\mathbf{N}$.

Prilikom prijelaza sa zbrajanja u $\mathbf{N}$ na zbrajanje u $\mathbf{Z}$, model brojevnog pravca se i dalje može primjenjivati za zadatke dodavanja i promjene (termometar, stanje na računu, vodostaj, nadmorska visina i sl.). Pritom je važno s učenicima primijetiti što "ostaje po starom" te koje su novosti uvedene na primjeru zbrajanja cijelih brojeva u odnosu na zbrajanje prirodnih brojeva na pravcu. Primjerice, kako na brojevnom pravcu i s pomoću žetona izgleda zbrajanje $2+3$, kako izgleda $2+(-3)$, kako izgleda $-2+3$ te kako izgleda $-2+(-3)$.

Važno je imati u vidu da učenicima može biti veliki problem činjenica da se u skupu $\mathbf{Z}$ odjednom gubi klasični skupovni model koji je do 6. razreda dominirao udžbenicima i nastavom matematike za zbrajanje prirodnih brojeva. Ako se učenike ne suoči s tom promjenom mogli bi imati problema u shvaćanju i rješavanju zadataka. Primjer za to daje Gustav Malle[1] (1988.) za zadatak $-5+12=7$. Radi se o zadatku "*Navečer je bilo 5 stupnjeva ispod nule. Tijekom noći je zbog naleta toplog vjetra temperatura narasla za 12 stupnjeva. Kolika je temperatura izmjerena ujutro?*". U sklopu šireg istraživanja u Njemačkoj provedeni su intervjui i ovdje donosimo dio transkripta iz intervjua s jednim učenikom koji je zadatak $-5+12$ točno riješio, ali očito ima krivu predodžbu što se zapravo dogodilo s temperaturom.

Zadatak. $(-5+12=7)$

Navečer je bilo 5 stupnjeva ispod nule. Tijekom noći je zbog naleta toplog vjetra temperatura narasla za 12 stupnjeva. Kolika je temperatura izmjerena ujutro?

[1] Izvor: Malle, G. (1988.): *Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen.* In: W. Dörfler (ur.), Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 259–319. (slobodan prijevod na hrvatski: D.G.G.)

Intervju (I – ispitivač; U – učenik):

I: **Kolika je temperatura bila ujutro?**

U: Pa vjerojatno u plusu.

I: **Možeš li mi malo bolje to objasniti?**

U: Radi se o toplom vjetru, zar ne? Dakle, kada on puše, uvijek je temperatura pozitivna. Zbog toga je noću plus 12 stupnjeva, dakle noću, jer je zapuhao vjetar... prvo na večer – dakle večer je u 8 sati, tada je večera. I tada je bilo 5 stupnjeva, minus. I tada je, recimo u 12 sati, došao topao vjetar. On je donio topli zrak i tada je bilo plus 12 stupnjeva, i ujutro je još uvijek temperatura mogla biti u plusu.

I: **A koliko je iznosila?**

U: 7 stupnjeva. Zato što se zrak nekako izmiješao, zar ne?

I: **Možeš li to nekako nacrtati?**

U: Moram li crtati tri termometra?

I: **Pokušaj to nacrtati na jednom termometru!**

U: (crta ovu sliku)

I: **Što znači ovo: u ponoć plus 12 stupnjeva? Što si time mislio?**

U: Da je došao topli vjetar.

I: **Je li to zato što je temperatura narasla zbog naleta toplog vjetra?**

U: Da! Narasla je do tuda. Dakle prvo je navečer bila minus 5 stupnjeva. Tada je došao topli vjetar. Tada je termometar došao na 12 stupnjeva i rano ujutro je opet pao do plus 7.

Primijetimo da, umjesto dinamičnog modela brojevnog pravca, ispitani učenik ovo zbrajanje cijelih brojeva silom želi prikazati kao skupovni model. On čak pita treba li nacrtati tri termometra (svaki za po jedan pribrojnik i jedan za zbroj). Drugi pribrojnik 12 njemu ne označava promjenu koja se vrši na prvom pribrojniku, već je to za njega novi skup koji ide u uniju s prvim, tj. val toplog zraka od 12 °C koji se pomiješao s hladnim zrakom. Kada bi to bilo točno, onda bi se "miješanjem toplog i hladnog zraka" dobila aritmetička sredina tih dviju temperatura, a to je 3.5 °C.

Zanimljivo je također da je učenik točno odgovorio na zadatak, $-5 + 12 = 7$. Unatoč tome, nikako ne bismo trebali biti zadovoljni njegovim ukupnim odgovorom jer modeli koje je koristio otkrivaju da nije razumio što se u zadatku zapravo dogodilo. Do ovakvih zabluda može doći ako je prevladavao skupovni model kroz prirodne brojeve, a kod uvođenja negativnih brojeva nije se dovoljno pažnje pridavalo novostima koje se događaju s pripadnim modelima.

Istraživanje o modelima zbrajanja u Hrvatskoj

Nakon ovog primjera prirodno se postavlja pitanje: *A kako hrvatski učenici reagiraju na zbrajanje cijelih brojeva? Imaju li i oni problema s modelima kao učenik iz Njemačke?* Bilo bi zanimljivo provesti slično istraživanje s ciljem unapređenja naše nastave matematike.

Na Učiteljskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, Odsjek u Čakovcu[2], provedeno je malo istraživanje matematičkih udžbenika o tekstualnim zadatcima

[2] Zahvaljujem studenticama Marini Kalaica, Dijani Fekonja, Josipi Pejić i Ivi Prprović na pomoći oko analize udžbeničkih tekstualnih zadataka s kontekstom vezanih uz zbrajanje prirodnih i cijelih brojeva od 1. do 6. razreda osnovne škole.

s kontekstom koji se odnose na zbrajanje prirodnih brojeva. Kako je kod primjene modela zbrajanja važan kontinuitet i obrazovna vertikala, analizirani su svi zadatci riječima jednog nakladnika vezani uz zbrajanje od prvog do šestog razreda osnovne škole. Radi se o kompletima udžbenika koji su bili važeći u školskoj godini 2012./13. Od prvog do petog razreda analizirana su poglavlja zbrajanja prirodnih brojeva, a u šestom razredu zbrajanje cijelih brojeva. Obuhvaćen je cijeli udžbenički komplet za svaki razred, tj. udžbenik, zbirka zadataka i radna bilježnica.

Kod svakog tekstualnog zadatka s kontekstom vezanim uz zbrajanje gledalo se radi li se o zadatku kombinacije (npr. *Ivan ima 3 kuglice, Ana ima dvije. Koliko imaju zajedno?*), zadatku promjene (npr. *Ivan je imao 3 kuglice pa je dobio još dvije. Koliko kuglica sada ima Ivan?*) ili mješovitom zadatku u kojem se koriste oba tipa (npr. *Ivan ima dvije kuglice, a Marko jednu manje od Ivana. Koliko kuglica imaju zajedno?*). Zadatak kombinacije je pogodan za skupovni model, a zadatak promjene za nizanje ili brojevni pravac.

	Zadatak kombinacije	Zadatak promjene	Mješoviti zadatak	Ukupan broj zadataka riječima sa zbrajanjem
1. razred	16 (48.5 %)	16 (48.5 %)	1 (3.0 %)	33
2. razred	56 (68.3 %)	22 (26.8 %)	4 (4.9 %)	82
3. razred	42 (58.3 %)	27 (37.5 %)	3 (4.2 %)	72
4. razred	28 (63.6 %)	6 (13.6 %)	10 (22.7 %)	44
5. razred	7 (70 %)	2 (20 %)	1 (10 %)	10
6. razred	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0

Rezultati pokazuju da je u prvom razredu bio jednak broj zadataka kombinacije i promjena, dok je u trećem, četvrtom i petom razredu znatno veći udio zadataka kombinacije u odnosu na zadatke promjene. To znači da zadatcima zbrajanja dominira skupovni model. Pritom je važno napomenuti da su u riješenim primjerima za razrednu nastavu prisutna oba modela: i skupovni i brojevni pravac. Najviše zadataka riječima sa zbrajanjem je u drugom i trećem razredu. U četvrtom razredu ih je najmanje gledamo li samo razrednu nastavu, ali u četvrtom razredu ima više mješovitih zadataka nego zadataka promjene. To se može protumačiti da zadataka ima manje, ali su zahtjevniji – i tekstom i matematičkim zahtjevima. Manji broj tekstualnih zadataka u prvom razredu je povezan s činjenicom da učenici tek uče čitati i računati.

Zadatci kombinacije uglavnom sadrže kontekst blizak učenicima (npr. olovke, kolači, knjige, učenici, odjeća, novac, sličice, bomboni i sl.), a to znači da je skupovni model lako primijeniti na konkretnim materijalima. No, rezultati pokazuju da niti jedan tekstualni zadatak zbrajanja u skupu $\mathbf{N}$ od prvog do petog razreda nije sadržavao kontekst *termometra, nadmorske visine ili vodostaja* koji bi se kasnije mogli primijeniti i za cijele brojeve. Zadatci promjene uglavnom su se odnosili na promjenu koja se može prikazati nizanjem pojedinačnih predmeta poput, primjerice, autića, cvijeća, životinja, jaja i slično. Samo nekolicina zadataka promjene je sadržavala kontekst vezan direktno uz neki oblik brojevnog pravca ili skale: telefonski račun, dob, duljine predmeta, duljine puta, vrijeme i sl. Od tih konteksta nažalost se ne može sastaviti analogni zadatak s pribrojnicima iz skupa $\mathbf{Z}$.

Zanimljivi su rezultati vezani za peti i šesti razred. U analiziranom udžbeniku u petom razredu, iako postoji tema Zbrajanje prirodnih brojeva, ima samo 10 tekstualnih zadataka sa zbrajanjem u kontekstu. To je trostruko manje nego broj takvih zadataka za prvašiće. U šestom razredu uopće nema tekstualnih zadataka vezanih uz zbrajanje cijelih brojeva! Uvid u udžbenike pokazuje da se u petom i šestom razredu vježbanje zbrajanja uglavnom svodi na simboličke zadatke tipa $234 + 608$ ili $-30 + (-25)$. Ovakvi zadatci se trebaju rješavati slijedeći zadano pravilo za zbrajanje. Ovaj nalaz ukazuje da naši učenici viših razreda uopće ne pristupaju zadatcima zbrajanja s pomoću modela, već

je dominantno slijeđenje pravila na simboličkim zadatcima. S obzirom na to da u Hrvatskoj zadatci iz matematičkih udžbenika imaju centralnu ulogu u vježbanju, ovi rezultati svakako pokazuju velik deficit koji učenicima zasigurno stvara teškoće u razumijevanju zbrajanja u skupu $\mathbf{Z}$ (a time vjerojatno i kasnije na drugim skupovima).

Ovo istraživanje ima i svoja ograničenja. Jedno od njih je što je analiziran set udžbenika samo jednog nakladnika (doduše s jako velikim udjelom na tržištu). Uz to, ovdje su analizirani samo zadatci zbrajanja (tekstualni s kontekstom) i koji modeli su im pogodni (skupovni, promjene ili kombinacija). Pritom nije gledano jesu li u udžbeniku možda sugerirali kojim modelom to riješiti. Taj izazov ostavljamo za neka buduća istraživanja.

Zaključak

Tekstualni zadatci pred učenike stavljaju velike izazove (od čitanja i razumijevanja teksta, preko razumijevanja problema, odabira strategije i izračuna, do promišljanja o rezultatu). Posebna pažnja se u nastavi matematike treba posvetiti razumijevanju pitanja i odabiru strategije. Zato je, između ostalog, potrebno poznavati i modele kojima se aritmetički pojmovi približavaju učenicima. Osnovni modeli zbrajanja su model skupa i model brojevnog pravca. Važno je da nastavnik bude upoznat s osnovnim modelima te da u skladu s time pažljivo bira primjere i zadatke prilikom pripreme za sat. Udžbenički sadržaji bi pritom trebali biti prava podrška u pogledu modela i kvalitetnog odabira zadataka, pogotovo onih tekstualnih. Pritom, pod podrškom mislim i na kontinuitet po obrazovnoj vertikali: iako postoji jasna razlika između razredne i predmetne nastave, matematički sadržaji ne poznaju tu granicu. Rad s prirodnim brojevima bi trebao uključivati diskretnu pripremu za ostale skupove brojeva, gdje je to moguće. To obuhvaća prisutnost konteksta vezanih uz model brojevnog pravca već od prvog razreda (termometar, duljina i sl.) te rad samo s "pozitivnim žetonima".

Rezultati istraživanja u Njemačkoj pokazuju da dominacija skupovnog modela kod prirodnih brojeva može dovesti do zabluda kod uvođenja novih skupova brojeva, primjerice skupa $\mathbf{Z}$. Analiza udžbeničkih zadataka iz Hrvatske nažalost upućuje da se skupovi $\mathbf{N}$ i $\mathbf{Z}$ u praksi ponekad shvaćaju kao dva disjunktna skupa, a ne kao podskup i nadskup.

Promišljanje o obrazovnoj vertikali, kontinuitetu, kontekstima i modelima već u skupu $\mathbf{N}$ pridonijelo bi boljem razumijevanju matematičkih pojmova u šestom razredu prilikom uvođenja skupa cijelih brojeva, kao i zbrajanja u njemu. Uostalom, u MiŠ-u je već bilo riječi da se u šestom razredu događaju izvjesni *lomovi* u nastavi matematike (Glasnović Gracin, 2011.), a vjerojatno tim lomovima pridonosi i prelazak računanja sa skupa prirodnih na skup cijelih brojeva.

LITERATURA

1/ D. Glasnović Gracin, *Razlomci – uzročnici loma u nastavi matematike?*, Matematika i škola 61, 4–10, Element, Zagreb, 2011.

2/ D. Herjavec, D. Glasnović Gracin, *Računska gusjenica*, Matematika i škola 56, 11–15, Element, Zagreb, 2010.

3/ L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić, *Petica 6. Udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za 6. razred*, prvi svezak. Zagreb, SysPrint, 2007.

4/ G. Malle, *Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen*. In: W. Dörfler (ed.), Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 1988., 259–319.

5/ N. Pavlin-Bernardić, D. Rovan, V. Vlahović-Štetić, *Kad u matematici "više" zapravo znači "manje": Analiza uspješnosti u rješavanju problemskih zadataka usporedbe*. Psihologijske teme, 20 (2011.), 1, 115–130.

6/ R. Vom Hofe, *Vorschläge zur Öffnung normativer Grundvorstellungskonzepte für deskriptive Arbeitsweisen in der Mathematikdidaktik*. Izašlo u: H.-G. Steiner, H.-J. Vollrath (Ur.): Neue problem und praxisbezogene Forschungsansätze. Köln 1995., 42–50.