

Konstrukcije zlatnog reza



Viktorija Dimec¹, Zrinka Franušić², Zagreb

Postoji li poveznica između grčkog Partenona, Mliječne staze, ljudskoga tijela, vrtloga uragana, cvijeta ruže i puževe kućice? Odgovor na ovo pitanje sadržan je u matematičkoj konstanti

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

koja je poznatija pod nazivom **zlatni rez** ili **božanska proporcija**. Zlatni rez vezan je uz ravnotežu, sklad, ljepotu i savršenstvo. Od Platona, preko da Vincija do Keplera, zlatni rez daje matematičari epitet univerzalne znanosti. Samim tim on predstavlja jednu od najpoznatijih poveznica između matematike i arhitekture, matematike i prirode, matematike i glazbe, matematike i likovne umjetnosti. U ovom članku opisat ćemo sedam najzanimljivijih konstrukcija zlatnog reza.

Krenimo redom i ponovimo definiciju. Kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza ako je omjer duljine cijele dužine ($|AB| = x + y$) prema većem dijelu ($|AC| = x$) jednak omjeru većeg dijela ($|AC| = x$) prema manjem dijelu ($|CB| = y$). Lakim računom slijedi da je

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y} = \varphi.$$



Slika 1. C dijeli $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza.

Ponekad točku C nazivamo *unutarnjim* zlatnim rezom dužine $\overline{AB}$, a točku B *vanjskim* zlatnim rezom dužine $\overline{AC}$.

¹ Magistra edukacije matematike, viktorija.dimec@gmail.com

² Docentica na PMF-Matematičkom odsjeku u Zagrebu, fran@math.hr

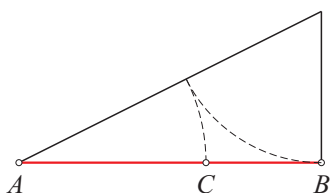
Konstrukcija ravnalom i šestarom Eulerova konstrukcija

Započnimo s najpoznatijom konstrukcijom zlatnog reza.

Konstrukcija 1. Neka je dana dužina $\overline{AB}$. U točki B konstruirajmo okomicu na $\overline{AB}$ te na toj okomici istaknimo točku D takvu da je

$$|AB| = 2|BD|.$$

Kružnica sa središtem u D polumjera $|BD|$ siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki E . Nadalje, kružnica sa središtem u A polumjera $|AE|$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki C .



Slika 2. konstrukcija ravnalom i šestarom

Tvrdnja 1. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.

Dokaz. Izračunajmo omjer $|AB|/|AC|$. Trokut ABC je pravokutni pa prema Pitagorinu teoremu i pretpostavci imamo

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 = 5|BD|^2.$$

Nadalje,

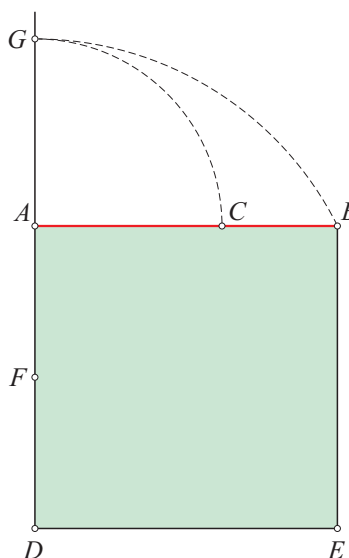
$$\begin{aligned} |AC| &= |AE| = |AD| - |DE| \\ &= |AD| - |BD| = (\sqrt{5} - 1)|BD|. \end{aligned}$$

Sada je

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2|BD|}{(\sqrt{5} - 1)|BD|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Ne čudi nas što je jedna od konstrukcija zlatnog reza nazvana po Leonhardu Euleru³ – najplodnijem matematičaru svih vremena.

Konstrukcija 2. Konstruirajmo kvadrat $DEBA$ te označimo s F polovište dužine $\overline{AD}$. Kružnica sa središtem u F polumjera $|FB|$ siječe polupravac FA u točki G . Kružnica sa središtem u A polumjera $|AG|$ siječe $\overline{AB}$ u točki C .



Slika 3. Eulerova konstrukcija

Tvrdnja 2. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.

Dokaz. Trokut AFB je pravi i prema pretpostavci je $|AB| = 2|AF|$ pa je $|FB|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 = 5|AF|^2$. Nadalje,

$$\begin{aligned} |AC| &= |AG| = |FG| - |AF| \\ &= |FB| - |AF| = (\sqrt{5} - 1)|AF|. \end{aligned}$$

Kako je $|AB| = 2|AF|$, slijedi

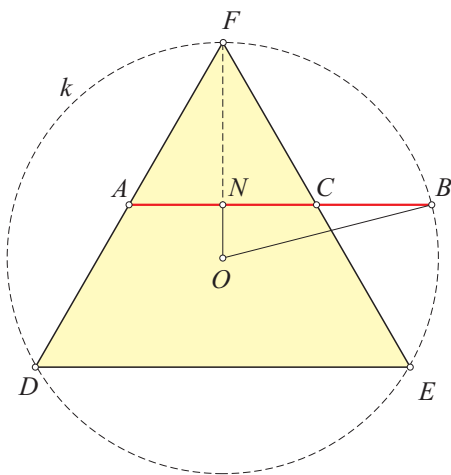
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \varphi.$$

³ Švicarski matematičar, fizičar i astronom (1707.–1783.)

Odomova konstrukcija

Tvorac ove konstrukcije zlatnog reza je George Odom⁴ i datira iz 1982. godine.

Konstrukcija 3. Nad dužinom $\overline{AC}$ konstruiramo jednakostranični trokut ACF . Točka D je centralnosimetrična slika točke F s obzirom na A , a točka E je centralnosimetrična slika točke F s obzirom na C . Kružnica opisana trokutu DEF siječe polupravac AC u točki B .



Slika 4. Odomova konstrukcija

Tvrdnja 3. Točka B dijeli dužinu $\overline{AC}$ u vanjskom zlatnom omjeru.

Dokaz. Prema samoj konstrukciji imamo da je trokut DEF jednakostraničan te da je $\overline{AC}$ njegova srednjica, dakle $|DE| = 2|AC|$. Neka je N nožište visine spuštene iz vrha F na stranicu $\overline{AC}$. Označimo s v duljinu visine trokuta ACF te s R polumjer opisane kružnice trokutu DEF . Budući da želimo odrediti omjer $|AB|/|AC|$, izrazimo

$$|AB| = |AN| + |NB|.$$

Trokut NOB je pravokutan pa je

$$|NB|^2 = R^2 - |ON|^2 = R^2 - (R - v)^2.$$

⁴ Američki umjetnik 20. stoljeća poznat po radovima o zlatnom rezu (1941.–)

Kako je $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AC|$ i $v = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|$, slijedi

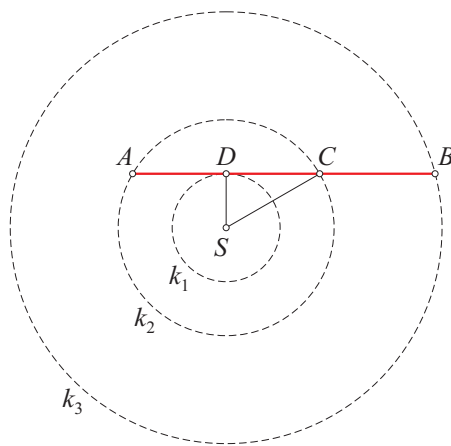
$$|NB| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AC|.$$

Stoga je

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}|AC| + \frac{\sqrt{5}}{2}|AC|}{|AC|} = \varphi.$$

Konstrukcija s pomoću tri koncentrične kružnice

Konstrukcija 4. Neka su k_1, k_2, k_3 tri koncentrične kružnice čiji se polumjeri odnose u omjeru 1 : 2 : 4. Konstruirajmo tangentu na kružnicu najmanjeg polumjera (k_1) u točki D . Tangenta siječe kružnicu k_2 u točkama A i C . Polupravac AC siječe kružnicu k_3 u točki B .



Slika 5. konstrukcija s pomoću tri koncentrične kružnice

Tvrdnja 5. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.

Dokaz. Prema konstrukciji, polumjeri kružnica k_1, k_2 i k_3 su

$$r_1 = k, \quad r_2 = 2k, \quad r_3 = 4k,$$

za neki prirodan broj k . Trokuti CDS i BDS su pravi pa vrijedi

$$|DC| = \sqrt{r_2^2 - r_1^2} = \sqrt{3}k,$$

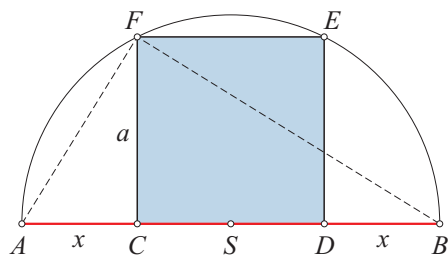
$$|DB| = \sqrt{r_3^2 - r_1^2} = \sqrt{15}k.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{|AD| + |DB|}{|AD| + |DC|} = \frac{|DC| + |DB|}{2|DC|} \\ &= \frac{\sqrt{3}k + \sqrt{15}k}{2\sqrt{3}k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi. \end{aligned}$$

Konstrukcija s pomoću kvadrata upisanog u polukružnicu

Konstrukcija 5. U polukrug promjera $|AB| = 2r$ upišimo kvadrat $CDEF$ tako da stranica $\overline{CD}$ leži na $\overline{AB}$.



Slika 6. konstrukcija s pomoću kvadrata upisanog u polukružnicu

Tvrđnja 6. Točka C , odnosno D , dijeli dužinu $\overline{AD}$, odnosno $\overline{CB}$, u zlatnom omjeru.

Dokaz. Označimo s a duljinu stranice kvadrata $CDEF$, te $x = |AC| = |DB|$. Pravokutni trokuti ACF i FCB su slični pa vrijedi

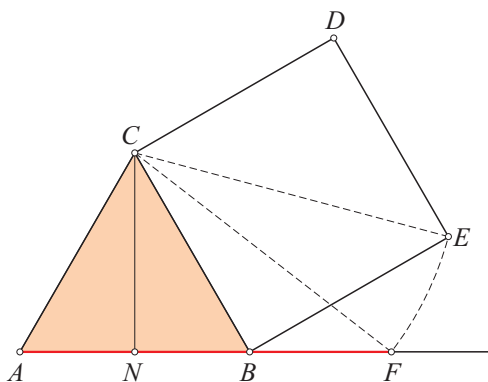
$$\frac{a}{x} = \frac{2r - x}{a},$$

što možemo zapisati kao

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|CD|}.$$

Konstrukcija s pomoću jednakostraničnog trokuta

Konstrukcija 6. Neka je dan jednakostranični trokut ABC . Nad stranicom $\overline{BC}$ konstruirajmo kvadrat $BEDC$. Kružnica sa središtem u točki C polumjera $|CE|$ siječe polupravac $\overline{AB}$ u točki F .



Slika 7. konstrukcija s pomoću jednakostraničnog trokuta

Tvrđnja 7. Točka B dijeli dužinu $\overline{AF}$ u zlatnom omjeru.

Dokaz. Neka je $a = |AB|$ te N nožište visine iz vrha C trokuta ABC . Budući da je $\overline{CE}$ dijagonala kvadrata $BEDC$, vrijedi

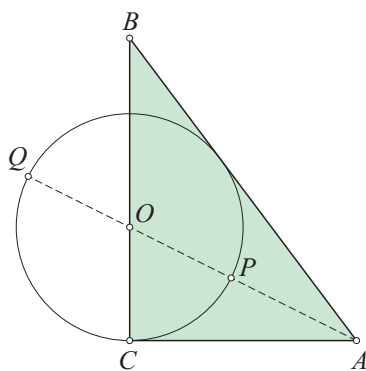
$$|CE| = |CF| = a\sqrt{2}.$$

Trokut CNF je pravokutan pa je $|NF|^2 = |CF|^2 - |NC|^2$. Kako je $|NC| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, dobivamo $|NF| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Sada je

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AN| + |NF|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a}{a} = \varphi.$$

Konstrukcija s pomoću egipatskog trokuta

Konstrukcija 7. Neka je dan egipatski trokut CAB , odnosno pravokutni trokut s katetama duljine $|AC| = 3$ i $|CB| = 4$ te hipotenuzom duljine $|BA| = 5$. Simetrala s unutarnjeg kuta pri vrhu B siječe nasuprotnu stranicu $\overline{AC}$ u točki O . Kružnica sa središtem u točki O polumjera $|OC|$ siječe simetralu s u točkama P i Q .



Slika 8. konstrukcija s pomoću egipatskog trokuta

Tvrdnja 8. Točka P dijeli dužinu $\overline{AQ}$ u zlatnom omjeru.

Dokaz. Prema poučku o simetrali unutarnjeg kuta trokuta, simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u

omjeru preostale dvije, odnosno

$$\frac{|OC|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3}{5}.$$

Kako je $|OC| = 4 - |OB|$ i $|OB| = \frac{5}{3}|OC|$, slijedi da je $|OC| = \frac{3}{2}$. Trokut OCA je pravokutan pa je

$$|OA| = \sqrt{|OC|^2 + |AC|^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Sada je

$$\frac{|QP|}{|PA|} = \frac{2|OC|}{|OA| - |OC|} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2}} = \varphi.$$

Završimo riječima Johannesa Keplera koje govore o važnosti zlatnog reza u matematici: *Geometrija ima dva velika blaga, prvo je Pitagorin teorem, a drugo je zlatni rez. Prvo možemo usporediti sa zlatom, a drugo s draguljem neprocjenjive vrijednosti.*

LITERATURA

- 1/ V. Dimec, *Zlatni rez*, diplomski rad, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2013.
- 2/ T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, John Wiley & Sons, 2001.
- 3/ D. Žubrinić, *Božanski ili zlatni omjer*, Matematičko-fizički list, (1999.), 65–77.
- 4/ A. Bogomolny, *Golden Ratio in Geometry*, (1996.). Dostupno na: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml



SRETAN
USKRS
ŽELE VAM
MIŠ I
ELEMENT!