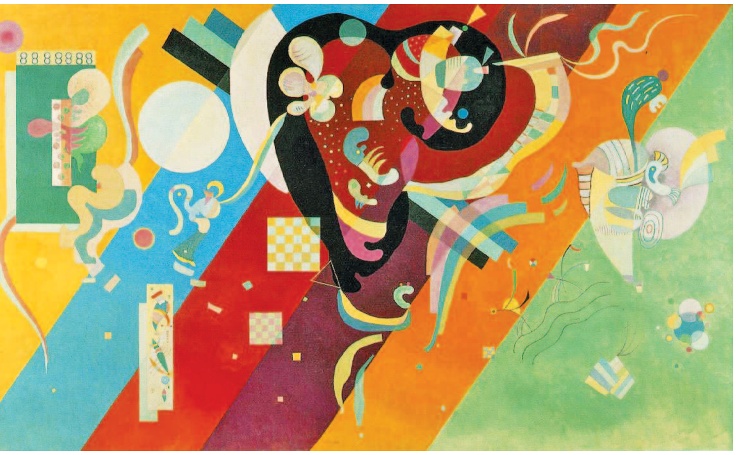
Grafičko rješavanje
jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja



Aleksandra Floreani, Osijek

U ovom izlaganju bavit ćemo se grafičkim rješavanjem algebarskih jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja. Riječ je o jednoj od mogućih metoda rješavanja jer ih često nije moguće riješiti faktorizacijom, a gotove formule poprilično su nezgrapne. Tada nam mogu pomoći grafovi.

Rješenja algebarskih jednadžbi možemo odrediti kao nulišta pridruženog polinoma, no grafove nije uvijek jednostavno nacrtati. U takvim slučajevima jednadžbu možemo razdvojiti na polinome čije grafove možemo lako nacrtati. U tom slučaju rješenja su apscise sjecišta dvaju grafova pridruženih lijevoj i desnoj strani jednadžbe. Točna rješenja ne možemo uvijek očitati s grafa, ali možemo ih odrediti približno ili točno nacrtati u nekome od programskih paketa.

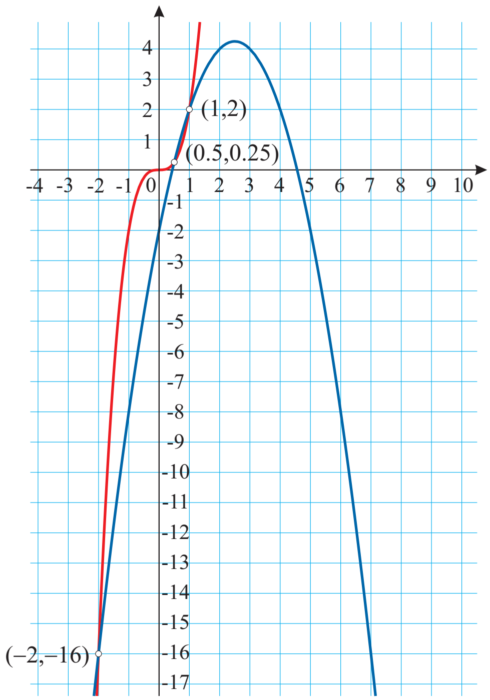
Jednadžbe trećeg stupnja

Zadatak 1. *Grafički odredite realne korijene jednadžbe* $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

Pregrupiramo jednadžbu u oblik

$$2x^3 = -x^2 + 5x - 2 = 0.$$

S lijeve strane je polinom trećeg stupnja, a s desne drugog. Nacrtamo grafove obaju polinoma i uočimo njihova sjecišta. Sijeku se u točkama $(-2, -16)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $(1, 2)$. Rješenja polazne jed-



nadžbe su apscise tih sjecišta $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$,

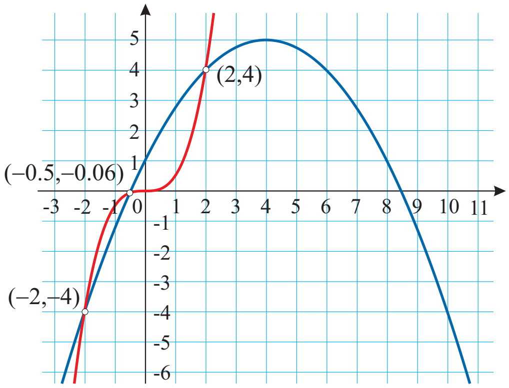
$x_3 = 1$.

Zadatak 2. *Grafički odredite realne korijene jednadžbe* $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$.

Pregrupiramo jednadžbu u oblik $2x^3 = -x^2 + 8x + 4$. S lijeve strane se nalazi polinom trećeg stupnja. Kako je vodeći koeficijent veći od 1, graf je bliži osi ordinata te je nezgodan za crtanje. Kako bi si olakšali crtanje, cijelu jednadžbu možemo podijeliti. U tom slučaju dobivamo:

$$2x^3 = -x^2 + 8x + 4 \quad / : 4$$
$$\frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1.$$

Nacrtamo grafove dobivenih polinoma. Njihova sjecišta su točke $(-2, -4)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$, $(2, 4)$. Rješenja dane jednadžbe su $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 2$

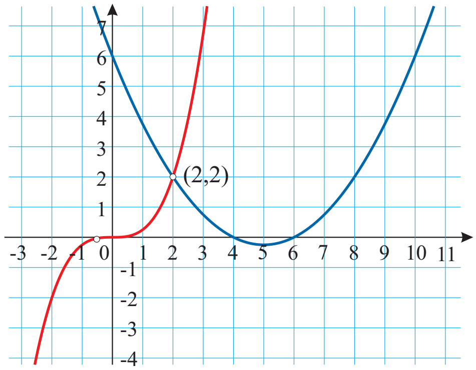


Zadatak 3. *Grafički odredite realne korijene jednadžbe* $x^3 - x^2 + 10x - 24 = 0$.

Jednadžbu napišemo u obliku $x^3 = x^2 - 10x + 24$. Radi lakšeg crtanja podijelimo jednadžbu

$$x^3 = x^2 - 10x + 24 \quad / : 4$$
$$\frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 6.$$

Nacrtamo grafove. Jedino sjecište je točka $(2, 2)$ što znači da polazna jednadžba ima samo jedno realno rješenje $x_1 = 2$.



Jednadžbe četvrtog stupnja

Problem rješavanja jednadžbe četvrtog stupnja svest ćemo na grafičko određivanje sjecišta fiksne parabole $y = x^2$ i kružnice. Za taj postupak potrebno je znati jednadžbu kružnice.

Neka je $S(p, q)$ središte kružnice k i neka je r njezin promjer. Neka je $T(x, y)$ bilo koja točka kružnice. Jednadžba kružnice je

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Zadatak 4. *Grafički odredite realne korijene jednadžbe* $x^4 - 7x^2 + 6x = 0$.

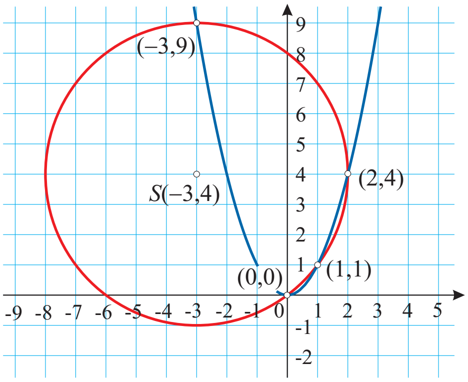
Transformirajmo zadanu jednadžbu

$$\begin{aligned} & x^4 - 7x^2 + 6x \\ & \quad = (x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 + 6x + 9) - 16 - 9 \\ & \quad = (x^2 - 4)^2 + (x + 3)^2 - 25. \end{aligned}$$

Uvedemo supstituciju $y = x^2$, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} & y = x^2 \\ & (y - 4)^2 + (x + 3)^2 = 25. \end{aligned}$$

Ucrtamo u koordinatni sustav parabolu $y = x^2$ i kružnicu sa središtem u $S(-3, 4)$ polumjera 5. Vidimo kako se te krivulje sijeku u točkama $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(-3, 9)$.



Dakle, realna rješenja su

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

Općenito kako bismo mogli na ovaj način rješavati normirane jednadžbe četvrtog stupnja, trebamo ih prvo svesti na oblik u kojem nema kubnog člana.

Pođimo od jednadžbe

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0.$$

Supstitucijom $z = x + t$ imamo

$$\begin{aligned}
&(x^4 + 4x^3 t + 6x^2 t^2 + 4xt^3 + t^4)\\
&\quad + a_1(x^3 + 3x^2 t + 3xt^2 + t^3)\\
&\quad + a_2(x^2 + 2xt + t^2) + a_3(x + t) + a_4 = 0\\
&x^4 + (4t + a_1)x^3 + (6t^2 + 3a_1 t + a_2)x^2\\
&\quad + (4t^3 + 3a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3)x\\
&\quad + (t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4) = 0.
\end{aligned}$$

Sada iz $4t + a_1 = 0$ slijedi $t = -\dfrac{a_1}{4}$.

Dakle supstitucijom $z = x - \dfrac{a_1}{4}$ polazna jednadžba poprima oblik

$$x^4 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0$$

gdje su

$$\begin{aligned}
b_1 &= 6t^2 + 3a_1 t + a_2\\
b_2 &= 4t^3 + 3a_1 t^2 + 2a_2 t + a_3\\
b_3 &= t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4.
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja, jednadžbu rješavamo na način prikazan u primjeru 1.

Zadatak 5. *Grafički odredite realne korijene jednadžbe* $z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 8z + 1 = 0$.

Najprije jednadžbu svodimo na oblik u kojemu nema kubnog člana supstitucijom $z = x - 1$.

Dobivamo jednadžbu

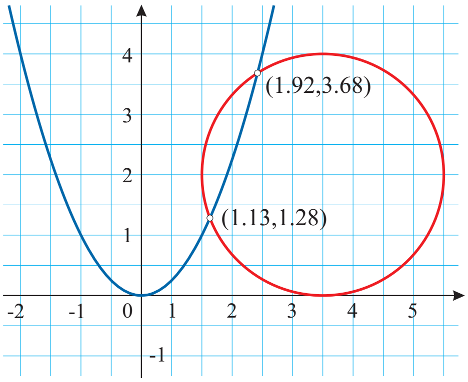
$$x^4 - 3x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Transformiramo jednadžbu

$$\begin{aligned}
x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 4 - 6x + 9 &= 0\\
(x^2 - 2)^2 + (x - 3)^2 &= 4.
\end{aligned}$$

Sada imamo sustav

$$\begin{aligned}
&y = x^2\\
&(x^2 - 2)^2 + (x - 3)^2 = 4.
\end{aligned}$$



Zadatak smo sveli na određivanje sjecišta parabole i kružnice. Vidimo da se sijeku u točkama $(1.92, 3.68)$ i $(1.13, 1.28)$. Dakle, realna rješenja su

$$\begin{aligned}
x_1 = 1.92 &\implies z_1 = 0.92\\
x_2 = 1.13 &\implies z_2 = 0.13.
\end{aligned}$$

Rješavanje jednadžbi trećeg stupnja možemo svesti na rješavanje jednadžbi četvrtog stupnja i to tako da jednadžbu pomnožimo s x što je jednadžba četvrtog stupnja koju znamo riješiti na ovaj način. Nađemo njene korijene, pri čemu se korijen $x = 0$ odbaci, a preostali korijeni su korijeni zadane jednadžbe.

Zadatak 6. *Grafički odredi realne korijene jednadžbe* $x^3 - 2x + 2 = 0$.

Pomnožimo jednadžbu s x i dobivamo

$$x^4 - 2x^2 + 2x = 0.$$

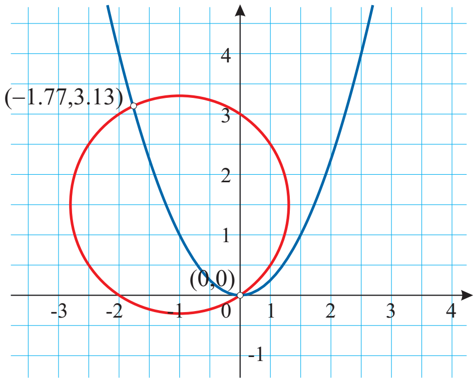
Transformiramo je

$$\left(x^4 - 3x^2 + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + (x^2 + 2x + 1) - 1 = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x+1)^2 = \frac{13}{4}.$$

Nacrtamo kružnicu sa središtem $S\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ i polumjerom $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (prolazi kroz središte).

Vidimo da se krivulje sijeku u točkama $(0,0)$ i $(-1.77, 3.13)$. Rješenje $x = 0$ zanemarujemo te jednadžba ima jedan realni korijen i on je približno $x = -1.77$



uz panoptikum

Auguste Herbin

U Panoptikumu ovog broja MiŠ-a predstavljamo nekoliko radova francuskog slikara Auguste Herbina (1882.-1960.). Ovaj je umjetnik svoju karijeru započeo priklanjajući se postimpresionistima da bi nakon susreta sa Pablom Picassom i Georgesom Braqueom načinio zaokret prema apstraktnom slikarstvu, najprije prema kubizmu a kasnije i radikalnijem konstruktivizmu. Krajem 30-tih godina prošlog stoljeća nastaju njegove slike s čistim dvodimenzionalnim geometrijskim formama jakih boja kakve vidimo i na našem Panoptikumu. Ove Herbinove slike potaknule su neke učitelje matematike da sa svojim učenicima provedu radionice u kojima se uz analizu slika umjetničko djelo povezuje s elementima geometrije.