

Pola tisućljeća *Melankolije*

Branimir Dakić, Zagreb

Prošlo je točno pola tisućljeća od nastanka jednog od najčudesnijih i najpoznatijih djela u povijesti likovnih umjetnosti, Dürerove *Melankolije* (*Melencolia I*¹). Kroz svih tih 500 godina nije posustalo zanimanje povjesničara umjetnosti, ali i mnogih drugih² za tu "sliku koja zadivljuje čitav svijet" kako ju je opisao Giorgio Vasari³. Peter-Klaus Schuster, njemački povjesničar umjetnosti, autoritet svjetskog ugleda, *Melankoliji* je posvetio svoje dvosvezačno djelo i o njoj govori kao o "slici nad slikama". Mogli bismo navoditi i brojne druge primjere. Nije tu samo riječ o divljenju vrhunskom estetskom uratku već i o njegovom bogatom sadržaju, o spletu elemenata koji otvaraju mnoga pitanja razne naravi.



pa se preimenovanje u Dürer vjerojatno dogodilo zbog iskrivljenog Tüerer (na njemačkom TÜR – vrata). Zanimljivo je da su vrata jedan od detalja na obiteljskom grbu Dürerovih. Albrechtov otac, potpisivao se kao *Tüerer*, bio je draguljar i sin je povremeno radio u njegovoj radionici. No ipak se vrlo rano opredijelio za slikarstvo. Oženio je, čini se po očevoj volji, 1494. Agnesu Frey, kći bogatog i uglednog građanina. Nisu imali djece. Krajem iste godine Dürer je otputovao u Italiju, tada vodeću zemlju ne samo u umjetnosti nego i u matematici.

Albrecht Dürer (1471. – 1528.) nije bio samo slikar i grafičar, nego i vrstan matematičar, dapače jedan od vodećih matematičara renesanse. U svoja je djela ugradio spoznaje do kojih je došao proučavanjem geometrije i čvrsto je vjerovao kako je za umjetničko djelo neophodno temeljito matematičko znanje.

Dürer je rođen u Nürnbergu 21. svibnja 1471. godine kao drugo od 18-ero djece Barbare i Albrechta Dürera. Obitelj potječe s jugoistoka Mađarske, iz sela Ajtós u blizini gradića Gyula pa je i sama nosila ime *Ajtós*. Na mađarskom riječ *ajtó* znači vrata



¹ Slika je gravura veličine 242 × 192 mm.

² Primjerice, Nobelovac Günter Grass posljednje poglavlje svojeg djelomice autobiografskog djela *From the Diary of a Snail* (Iz dnevnika jednog puža) posvetio je Dürerovoj *Melankoliji* a tekst je preuzet u [4].

³ Giorgio Vasari (1511. – 1574.), talijanski slikar, pisac životopisa talijanskih umjetnika. Za *Melankoliju* je rekao da je slika koja zadivljuje čitav svijet (*che feciono stupire il mondo*).

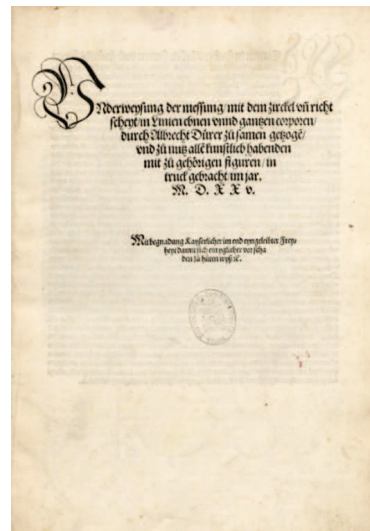
Boravio je kraće vrijeme u Tirolu, zatim u Veroni da bi konačno dospio u Veneciju. Tu je obilazio crkve i galerije i susretao se s lokalnim umjetnicima. Između ostalih upoznao je Jacopa de Barbarija⁴ koji mu je govorio o matematičkom radu Luce Pacioliya i značenju tog rada za umjetnička djela. Na Dürera je taj susret ostavio snažan utisak te je po povratku u Nürnberg prionuo na učenje matematike. Godine 1502. umire mu otac pa preuzima brigu o nemoćnoj, gotovo slijepoj majci. Prodaje svoje radove prekupcima i na lokalnim sajmovima. Bilo je to teško životno razdoblje za Dürera, narušeno mu je zdravlje i nikada se više nije potpuno oporavio.

Godine 1506. Dürer se po drugi put zaputio u Italiju želeći učiti od talijanskih majstora. Nije poznato s kime se tada povezao ali neki misle kako je bio kod Luce Pacioliya pa se tako, premda ne sasvim uvjerljivo i jasno utemeljeno, drži kako je na čuvenoj slici Jacopa de Barbarija u prvom planu Luca Pacioli, a u pozadini upravo Albrecht Dürer.



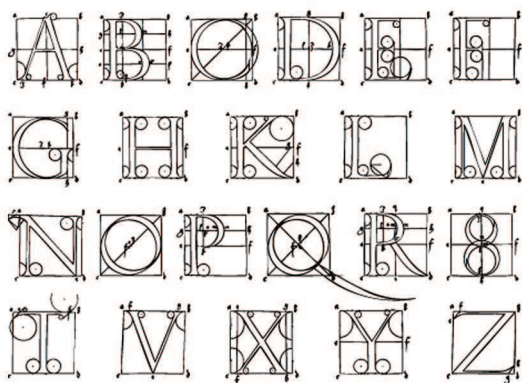
U Veneciji je Dürer nabavio Euklidove *Elemente* koje je temeljito proučio, a proučio je i čuveno Vitruvijevo djelo *De architectura*. U Dürerovim se radovima potom uočava jak utjecaj matematičke teorije, posebno teorije proporcionalnosti i perspektive. U narednom razdoblju nastali su njegovi najbolji radovi.

⁴ Jacopo de' Barbari (oko 1460. – 1516.), talijanski slikar.



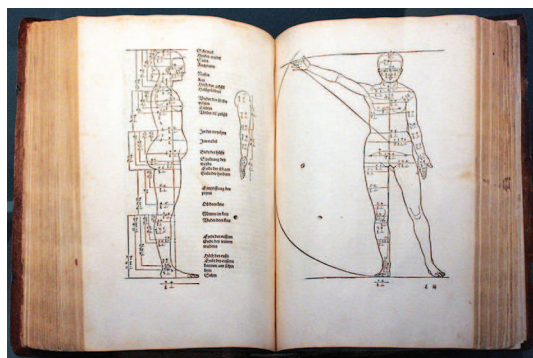
Godine 1525. Dürer je objavio četverosvezačno djelo *Underweysung der messung mit dem zirkel un richtscheyt in Linien eben unnd gantzen corporen* (Uputa za mjerenje šestarom i ravnom) [1]. Bio je to prvi udžbenik geometrije na njemačkom jeziku.

U prvom svesku naglasak je na *linearnoj geometriji*. Dürer obrađuje brojne krivulje (krivulje drugog reda, zavojnice, epicikloide, konhoide i dr.), prije svega bavi se njihovom konstrukcijom. Drugi se svezak bavi geometrijom ravnine. U njemu opisuje točne i približne konstrukcije pravilnih mnogokuta pri čemu se većinom oslanja na grčke geometre. Bavi se i rješavanjem klasičnih problema, kvadrature kruga i trisekcije kuta. Treći se svezak bavi primjenama geometrije u arhitekturi, u tipografiji (geometrijska konstrukcija latinskog alfabeta) i u raznim tehničkim područjima. Zanimljivo je Dürerovo istraživanje konstrukcije sunčanog sata i nekih astronomskih instrumenata. U četvrtom svesku obrađuju se Platonova tijela kao i sedam Arhimedovih te su priložene i mreže tih tijela. Zaokupljen je također konstrukcijama sjena te perspektivnih slika. Dürer u ovoj knjizi raspravlja o delijskom problemu te navodi svoje viđenje njegova rješenja.



U našem Panoptikumu tek je malen dio umjetnikovih crteža iz knjige. Vjerujemo da će bez nekog posebnog opisa i tumačenja čitatelji razaznati o čemu je riječ. Prednost smo dali crtežima koji su bliski našoj suvremenoj školskoj matematici. Radi se o poznatim krivuljama, pravilnim poligonima i nekim geometrijskim tijelima.

U posljednjoj godini života Dürer dovršava još jedno svoje djelo "Vier bücher von menschlicher proportion" (Četiri knjige o ljudskim proporcijama) [2]. U njemu s raznih stanovišta razmatra i opisuje proporcije 13 različitih vrsta ženskih i muških tijela.

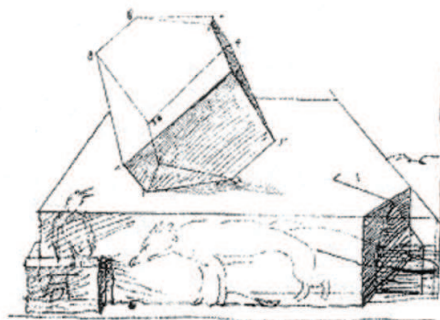


Prepustimo ljubiteljima umjetnosti pitanje bavljenja Dürerovim životom i djelom⁵, a mi se usredotočimo tek na jednu sliku, njegovo ako ne najbolje a ono svakako najpoznatije djelo, već spomenutu sliku *Die Melencolia I.* iz 1514. godine koja na najbolji način potkrepljuje značenje matematike u Dürerovu

djelu pa i u životu. Napomenimo tek da nikad nije objašnjen zapis rimskog broja I. u naslovu slike.

Ova neobična, upravo pola tisućljeća stara "slika nad slikama" ujedno je svojevrsna zagonetka koja je do danas doživjela mnoge interpretacije, no i dalje je jednako provokativna pa izaziva sve nova i nova tumačenja. U mnoštvu elemenata koji se uočavaju u toj čudesnoj kompoziciji, i koji bez dvojbe imaju određene skrivene simboličke poruke, uz istaknuti lik krilate žene nalazimo pješčanu uru, vagu s dvjema pliticama, šestar, kuglu, ravnanalo, a posebice izdvojimo poliedar i magični kvadrat.

Na slici je jasno uočljiv poliedar, koji je očito već zbog svoje napadne veličine dobio istaknutu ulogu. O kakvom je tijelu riječ? Koji je smisao njegova odabira? Dürer to nije nikada objasnio, premda se njime posebice bavio o čemu na neki način svjedoči i ovaj crtež.

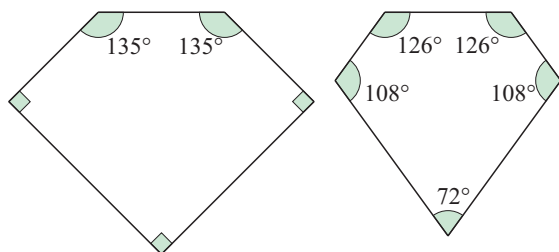


No zato je poliedar predmet izučavanja i tumačenja mnogih povjesničara umjetnosti pa o njemu i samo o njemu postoje brojne analize i studije.

Čini se kako bi na prvi pogled s matematičkog gledišta ovo tijelo bilo jednostavno opisati. Prevladava mišljenje kako je Dürerov poliedar nastao odsijecanjem ravninom dvaju dijagonalno suprotnih vrhova kocke pri čemu je ravnina presjeka okomita na dijagonalu. Takav je poliedar osmerostran, dvije su mu strane jednakostranični trokuti, šest ostalih strana sukladni su peterokuti s trima pravim kutovima i dvama kutovima od po 135° . No je li to baš tako? Pozabavimo se malo odgovorom. Problem je u

⁵ Preporučujemo <http://www.albrecht-durer.org/> gdje se uz biografiju nalaze i slike 933 njegova djela.

tome što s dvodimenzionalnog crteža nekog trodimenzionalnog lika ne možemo uvijek jednoznačno odgovoriti na pitanje o kakvom je liku riječ. Drugo je pitanje može li se Dürerov poliedar rekonstruirati ako otkrijemo geometrijsku pozadinu njegova nastanka. U svakom slučaju dvojbe su dovele do toga da se mnogi istraživači pozabave ovim naoko banalnim tijelom ne bi li iz njegova razobličavanja izvukli dublje Dürerove poruke.



Nakon što je postalo jasno kako nema uporišta tvrdnja da je Dürerov poliedar krnja kocka, prišlo se istraživanju drugih mogućnosti. Najuvjerljivijim se rješenjem čini kako je u pitanju jednakobridni paralelepiped, tijelo čije su sve strane sukladni rombovi. Presječenom je dvjema ravninama te je dobiven poliedar čije su dvije strane jednakostranični trokuti a ostalih šest su peterokuti. Dva su kuta tih peterokuta po 126° , dva po 108° a jedini šiljasti kut je 72° . Je li ovaj opis zapravo zasnovan na pretpostavci koja je utemeljena na pojavi kuta od 72° kao kuta pri vrhu karakterističnog trokuta pravilnog peterokuta te kuta od 108° kao unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta? Podsjećamo da je pravilni peterokut na razne načine vezan uz zlatni rez dužine. I ovim rješenjem mogli bismo se zadovoljiti premda ono počiva na pomalo klimavim nogama. Zbog čega? Upućujemo čitatelje na [5]. Tu se japanski znanstvenik Ishizu Hideko bavi oblikom Dürerova poliedra navodeći razne mogućnosti. Hideko drži kako je tijelo nastalo kao posljedica umjetnikova rada na rješavanju delijskog problema, jednog od triju klasičnih matematičkih problema.

Uz poliedar, još jedan detalj slike izaziva posebnu pozornost. To je magični kvadrat smješten na zidu u desnom gornjem kutu slike.



Magični kvadrat je kvadrat sa n^2 polja u koja su smješteni brojevi od 1 do n^2 tako da zbroj brojeva u svakom retku, svakom stupcu i u dvjema glavnim dijagonalama stalan i iznosi $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$. Taj se broj naziva magična suma, a u Dürerovu magičnom kvadratu ($n = 4$) jednak je 34. No posebnost ovog kvadrata jest u tome što su i zbrojevi brojeva u svakom od četiriju kvadranta jednaki 34, a taj zbroj ima i mali kvadrat u sredini. Kvadrat je još magičniji uočimo li kako je zbroj brojeva u malim kvadratima u uglovima također 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ali, ako ste pomislili da je gotovo, prevarili ste se. Pogledajte i sljedeće sličice:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

No još uvijek nije gotovo. Sljedećih 8 mogućnosti saželi smo na dvije sličice.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ove zanimljivosti rezultat su određenih matematičkih transformacija i trebalo bi se potanje njima pozabaviti. Čitatelje upućujemo na sjajne stranice udruge NRICH (engl. *enriching mathematics*)⁶.

No uz Dürerov magični kvadrat vezano je još nekoliko zanimljivosti. U njegovom posljednjem retku u dva središnja polja upisani su brojevi 15 i 14 i vjeruje se da je Dürer tako zabilježio godinu nastanka ove slike. Iste je godine umrla umjetnikova majka pa je i to možda razlog što su u ta dva polja upisani brojevi 15 i 14. Ostale su nam još neke zgodne činjenice koje možda i nemaju veze s Dürerom, ali su u najmanju ruku neobične. U istom, posljednjem

retku magičnog kvadrata na početnom i završnom položaju su brojevi 4 i 1. Redni su to brojevi slova D i A u alfabetskom poretku, slova koja su inicijali umjetnikova imena i prezimena. Nadalje, zbroj svih brojeva u magičnom kvadratu je $8 \times 17 = 136$. Ako se u latinskom zapisu Dürerova imena svakom slovu pridruži njegov redni broj u abecedi, onda imamo:

$$\begin{aligned}\text{ALBRECHT DVRER} &= \\ &= (1 + 12 + 2 + 18 + 5 + 3 + 8 + 20) \\ &\quad + (4 + 22 + 18 + 5 + 18) = 136.\end{aligned}$$

A slično vrijedi:

$$\begin{aligned}\text{MELENCOLIA EINS} &= \\ &= (13 + 5 + 12 + 5 + 14 + 3 + 15 + 12 + 9 + 1) \\ &\quad + (5 + 9 + 14 + 19) = 136.\end{aligned}$$

LITERATURA

- 1/ A. Dürer, *Underweysung der messung mit dem zirkel un richtscheyt in Linien eben unnd gantzen corporen*, <http://digital.slob-dresden.de/fileadmin/data/27778509X/27778509X.tif/jpegs/27778509X.pdf>
- 2/ A. Dürer, *Vier bücher von menschlicher proportion*, <https://archive.org/details/hierinnsindbegri00dure>
- 3/ N. Wolf, *Dürer*, Taschen GmbH, Köln 2007.
- 4/ G. Bartrum, *Albrecht Dürer and his Legacy*, The British Museum Press, London 2002.
- 5/ Ishizu Hideko, *Another Solution on the Polyhedron in Dürer's Melencolia: A visual Demonstration of the Delian Problem*, http://www.bigakukai.jp/aesthetics_online/aesthetics_13/text/text13-ishizu.pdf
- 6/ G. H. Hughes, *The Polygons of Albrecht Dürer-1525*, <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1205/1205.0080.pdf>

⁶ <http://nrich.maths.org/1338/1338>