Kapetanov problem

Dubravka Glasnović Gracin,
Zagreb

Na brodu se nalazi 26 *ovaca i* 10 *koza. Koliko je star kapetan tog broda?*

(zadatak iz istraživanja IREM Grenoble, Francuska, 1980.)

U prošlom broju MiŠ-a u tekstu *Zadatci s dijeljenjem stavljeni u kontekst* govorilo se o problemu dijeljenja u tekstualnim zadatcima, tj. kako kontekst može utjecati na rješenje zadatka. U ovom članku problematika zadataka ide još dalje, gotovo do samih svojih granica. Naime, u metodici matematike, posebice u području sastavljanja i rješavanja matematičkih zadataka s kontekstom, poznat je tzv. **kapetanov problem**, spominje se još i pod nazivom "Koliko godina ima kapetan?" Naime, u sklopu istraživanja za učenike drugog i trećeg razreda koje je 1980. godine proveo francuski *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (IREM) iz Grenoblea, jedno od pitanja bilo je i:

Na brodu se nalazi 26 ovaca i 10 koza. Koliko je star kapetan tog broda?

Rezultati istraživanja za ovaj zadatak pokazuju da je čak 76 od 97 ispitanika na ovo pitanje odgovorilo brojčanim podatkom koji se dobije operiranjem s brojevima 26 i 10. Primjerice, većina ispitanika je na pitanje odgovorila da kapetan ima 36 godina, jer je $26 + 10 = 36$.

S obzirom na to da su i druga istraživanja pokazala slične rezultate (npr. Selter, 2004.; Verschaffel i dr., 2000.), ovaj fenomen **slijepog operiranja brojevima** u tekstualnim zadatcima s kontekstom, bez pažljivog čitanja teksta zadatka naziva se "kapetanov sindrom", prema kontekstu zadatka iz francuskog istraživanja. Često se tekstualni zadatci koji nemaju smisla nazivaju "kapetanovi zadatci".

Prema Stelli Baruk (1989.), ideja za kontekst kapetanova zadatka potječe iz 19. stoljeća od francuskog pisca Gustavea Flauberta koji svojoj sestri Caroline u pismu iz 1841. piše:

S obzirom da sada učiš geometriju i trigonometriju, zadat ću ti zadatak. Brod plovi oceanom. Napustio je Boston napunjen vunom i ima masu 200 tona. Brod plovi prema luci Le Havre. Glavni jarbol je slomljen. Mornar je na palubi. Na brodu je 12 putnika. Vjetar puše iz smjera istok-sjeveroistok. Sat pokazuje tri i četvrt poslije podne. Mjesec je svibanj. Koliko godina ima kapetan?[1]

Primjećujemo da je zadatak od IREM-a iz 1980. pojednostavnjena verzija Flaubertova zadatka.

[1] Flaubert, Gustave; *Correspondance, première série* (1830. – 1850.), G. Charpentier et C^{ie}, *Éditeurs*, Paris, 1887.

Koliko godina ima kapetan?

O fenomenu kapetanova problema prvi je pisao nizozemski metodičar matematike Hans Freudenthal (1984.), koji se intenzivno bavio vezom matematičkog sadržaja i svakodnevice (engl. *realistic mathematics education*). Uz njega, jedan od glavnih razloga zašto je ovaj fenomen internacionalno poznat pod imenom **kapetanov problem** leži u vrlo utjecajnoj, često citiranoj i prevođenoj knjizi tada vodeće francuske metodičarke matematike Stelle Baruk *L'Âge du capitaine – de l'erreur en mathématiques* (Kapetanova starost/godine – o pogrešci u matematici) koja je knjigu naslovila upravo po kontekstu zadatka iz IREM-ova istraživanja. Autorica se u knjizi osvrće na rezultate IREM-ova istraživanja i izražava svoje čuđenje:

Djeca poput vas i mene, tj. kakvi smo bili ili kakva su naša djeca, djeca iz posljednje četvrtine 20. stoljeća, koja ne pohađaju posebne pedagoške ili psihološke programe, niti bolnice ili psihijatrijske stacionare – ne, sasvim normalna djeca, koja će biti naši građani u 2000. godini, križala su ovce s kozama kako bi dobila koliko je star kapetan.

(Baruk, 1989., str. 29.)

No, autorica ne ostaje samo na čuđenju, već pokušava razumjeti nastavu matematike i demistificirati problem. Smatra da se u mnogim francuskim osnovnim školama aritmetika i njene primjene rade kroz umjetne zadatke bez posebne veze s vanjskim svijetom. Uniformnost takvih matematičkih zadataka dovodi do pada interesa inače znatiželjnih i inteligentnih učenika te do loših rezultata kod matematičkih problema koji izlaze iz okvira rutinskih zadataka.

Intervjui s učenicima

Kasnija istraživanja o kapetanovu problemu išla su i korak dalje: ispitivači su nakon testa proveli intervjue i snimanja s učenicima u kojima su razgovarali o ovom fenomenu. Evo nekih primjera "kapetanovih problema" koji su se našli u tim istraživanjima:

- Pastir ima 19 ovaca i 13 koza. Koliko je star pastir?
- U razredu je 13 dječaka i 15 djevojčica. Koliko godina ima učiteljica?
- Na brodu se nalazi 36 ovaca. Od toga je 10 palo u vodu. Koliko je star kapetan tog broda?

Neka pitanja išla su i korak dalje. Primjerice, u istraživanju profesora Seltera (2004.) s učenicima u razrednoj nastavi su se pojavila pitanja u kojima je odgovor već skriven u tekstu, poput:

27-godišnji pastir imao je 25 ovaca i 10 koza. Koliko je star taj pastir?

Rezultati pokazuju da su ispitanici masovno zbrajali i oduzimali brojčane podatke iz teksta zadatka. Mnogi od njih zbrojili su sva tri podatka $27+25+10$. Istraživanje je obuhvatilo i intervjue u kojima su ispitani učenici objasnili da se do rješenja uvijek dolazi korištenjem svih podataka iz teksta.

Selter (2004.) spominje još jedno istraživanje vezano uz kapetanov problem, u kojem je $10\,\%$ učenika prvog razreda slijepo računalo s brojevima iz zadatka, čak $30\,\%$ učenika drugog razreda, te između $54\,\%$ i $71\,\%$ učenika trećeg i četvrtog razreda. Ovi rezultati su zanimljivi jer pokazuju da se udio učenika koji naslijepo računaju s danim brojevima povećava kroz razrednu nastavu. Jedan od glavnih razloga za to jest što matematika učenicima s vremenom postaje korištenje umjetnih pravila i ne potiče kritičko razmišljanje u tekstualnim zadatcima. Dakle, događa se upravo suprotno jednoj od osnovnih zadaća nastave matematike.

Rezultati intervjua pokazuju da učenici imaju sljedeće stavove o tekstualnim zadatcima:

- Zadatci riječima uvijek sadrže nevažne priče. Zašto onda uopće treba pomno čitati tekst?
- Računske operacije koje se traže u zadatcima na nastavi su upravo one o kojima se taj sat govori / koje odgovaraju zadanim brojevima.
- Rješenje je uvijek jedinstveno.
- Svaki zadatak je rješiv. Ako ne mogu riješiti zadatak, znači da sam ja kriv, smatrat će me slabim učenikom ili učenikom koji ne zna "logički razmišljati".

To su neki od razloga zašto učenici pod svaku cijenu računaju sa zadanim brojevima. Činjenica je da zadatci riječima koje učenici svakodnevno susreću na nastavi matematike imaju upravo navedene karakteristike. Zadatak u kojem se traži broj godina kapetana nije tipičan za nastavu matematike, a učenici su ga rješavali pristupom koji očito prolazi na nastavi matematike: *priča nije važna, samo upotrijebi sve brojeve koji se koriste u zadatku. Ako je današnji naslov Zbrajanje, dovoljno je da bez čitanja zbrojiš sve brojeve iz tekstualnog zadatka i dobit ćeš točan rezultat. Ako nešto u zadatku krene krivo, uvijek si ti kriv, trebaš više vježbati i bolje misliti*.

Američki metodičar matematike Alan Schoenfeld (1991.) govori o negativnim posljedicama tradicionalne nastave matematike u školama. On daje nekoliko primjera u kojima učenici, utopljeni u svakodnevnu školsku praksu koja je orijentirana na procedure, razvijaju matematičko "nerazmišljanje" (tj. angažmanom aktivnosti koje nemaju smisla) i prestanak pravog promišljanja.

Intervjuirani učenici nisu samo propustili primijetiti da su dani podatci irelevantni za rješenje zadatka, već su također i potpuno bezbrižno pojedine brojeve povezali jedne s drugima... Postoje dobri razlozi za mišljenje da je nastava matematike uzrok da učenici postupno gube svoje zdravo ljudsko razmišljanje.
(Schoenfeld, 1991., str. 316.)

Zahtjevi u nastavi matematike

Intervjui su pokazali da testirana djeca podrazumijevaju da se s pomoću broja životinja ne može dobiti dob kapetana. To što su unatoč tome dob kapetana ipak išli "računati", ima veze s time što su se djeca ponašala onako kako se od njih očekuje na nastavi: oni povezuju brojčane podatke u zadatku riječima jer se tako radi u školi. Ovakvo ponašanje prirodno stopira svaki daljnji matematički razvitak.

Zaključci od Baruk i Schoenfelda potenciraju pretpostavke da se tekstualni zadatci s kontekstom u nastavi matematike često rade bez uključenog razumijevanja konteksta i uvjeta iz situacije. Jedan od razloga za to leži u tome što su svi zadatci u udžbenicima složeni tematski, svaka vrijednost zadana u zadatku mora se iskoristiti i te gotovo uvijek imaju jedinstveno rješenje.

Stella Baruk zaključuje da:

- nastavnici ne traže od učenika dovoljno uključivanja smisla pri rješavanju zadataka
- učenici premalo propituju svoje postupke u odnosu na razumijevanje svakodnevice.

Ona smatra da je nastava matematike učenicima često bez smisla. Zadatci riječima sadrže beznačajne tekstove. Čemu onda uopće čitati tekst? Računske operacije koje se traže kako bi se točno riješio zadatak su uglavnom upravo one operacije koje stoje u naslovu pojedine jedinice ili teme. Ovim problemom bavi se i Freudenthal koji, misleći na matematičke udžbenike, govori:

Tamo je zabranjen pristup za probleme bez rješenja ili za one s više rješenja. Od učenika se očekuje da otkrije pseudo-izomorfizam na koji je mislio tvorac zadatka i da zadatak riješi na način na koji se on odnosi kroz pseudo-izomorfizam prema stvarnosti
(Freudenthal, 1984., 39.)

Kritike o umjetnoj prirodi tekstualnih udžbeničkih zadataka ukazuju da njihova nerealna priroda može biti razlog za nedostatak realističnih razmišljanja kod učenika. Selter (2004.) opisuje ponovljeno istraživanje s kapetanovim problemima u kojem je djeci unaprijed bilo rečeno da se neki od zadataka neće moći riješiti. U tom istraživanju nije tako velik udio učenika slijepo računao s danim brojkama, već su odgovarali sa "Zadatak nije moguće riješiti". Dakle, kada se djeca nauče da je moguće dati i taj odgovor, onda se rezultati istraživanja bitno mijenjaju. Ako ispitanici dotad nisu nikada rješavali takve zadatke na nastavi matematike, veća je vjerojatnost da će po ključu s nastave rješavati i kapetanove probleme.

Drugi pogled na dječje odgovore

No, analiza dječjih odgovora iz intervjua ukazuje na još jedan važan sloj interpretacije rezultata. Selter (2004.) postavlja pitanje jesu li dječji odgovori na pitanje "Koliko godina ima kapetan" potpuno bez smisla i iracionalni. Ili ih mi tako tumačimo, a djeca imaju svoja tumačenja koja njima ipak izgledaju smisleno?

Primjerice, na pitanje "Pastir ima 19 ovaca i 13 koza. Koliko je star pastir?" ispitani učenici su masovno odgovarali s *32 godine*. Neka od te djece su u intervjuu opisala kako su dobila taj odgovor: "To sam zaključio tako što je vjerojatno pastir za svaki svoj rođendan dobio po jednu ovcu ili kozu." Ili: "Pa teoretski je moguće da pastir bude star točno koliko ima životinja. Zašto ne?". Ovim komentarima dodajmo da starost i godine djeca ponekad doživljavaju drukčije nego odrasli.

Djeca traže skrivene znakove koji su slučajno ili namjerno sakriveni u nekoj poruci, u ovom slučaju u matematičkom zadatku. Uostalom, to svojstvo traženja skrivenog značenja nije svojstveno samo djeci. Oduvijek je ljudima bila posebno zanimljiva igra traženja tajnih poruka među brojevima. Prema Freudenthalu, djeca u kapetanovim problemima tragaju za "magičnim kontekstom" koji omogućava čitanje značenja među brojevnim odnosima. Takav kontekst je sredstvo s pomoću kojeg se očito apsurdan zadatak riječima prevodi u autentičan problem unutar dječje mašte.

No, usprkos ovoj interpretaciji, kapetanov problem je, općenito gledajući, tipičan primjer za mnoge učeničke prekide stvaranja smislenosti.

Sastavljanje zadataka

Krenimo sada još jedan korak dalje. Naime, kapetanov problem općenito ima i šire značenje u kontekstu sastavljanja i rješavanja zadataka. On može označavati i sve one zadatke u kojima je učenik mogao doći do (točnog) rješenja nasumičnim računanjem zadanim brojevima.

Primjer. Zamislimo primjerice situaciju u kojoj se u testu od učenika traži da izračuna koliko je 2^2.

Učenik A odgovori 4.

Učenik B odgovori 4.
Učenik C odgovori 4.

Sva trojica imaju točan rezultat. No, kako su došli do rješenja? Kvadriranjem? Možda. Ali možda i zbrajanjem baze i eksponenta ili množenjem baze i eksponenta? U ovom slučaju, sve ove mogućnosti daju 4.

Zamislimo da je sljedeći zadatak u tom testu $3^2 = ?$

Učenik A, slijedeći svoj uzorak iz prethodnog zadatka, odgovori 5.

Učenik B, slijedeći svoj uzorak iz prethodnog zadatka, odgovori 6.

Učenik C, slijedeći svoj uzorak iz prethodnog zadatka, odgovori 9.

Učenik A je očito do rješenja zadatka $2^2 = 4$ došao zbrajanjem baze i eksponenta $2 + 2 = 4$. Učenik B je do rješenja zadatka $2^2 = 4$ došao množenjem baze i eksponenta $2 \cdot 2 = 4$. Učenik C je očito do rješenja zadatka $2^2 = 4$ došao množenjem baze 2 sa samom sobom $2 \cdot 2 = 4$, što je točan koncept kvadriranja.

Što možemo zaključiti? Da račun 2^2 nije pogodan za provjeravanje poznaje li učenik kvadriranje jer se do rezultata 4 može doći i netočnim modelima i postupcima: zbrajanjem baze i potencije, ili množenjem baze i potencije. Zadatak 3^2 je primjereniji za ispitivanje je li učenik shvatio kvadriranje u simboličkom obliku. Sastavljači zadataka (testova, ispita znanja, mature i sl.) bi to svakako trebali imati na umu. Trebalo bi prilikom svakog ispitnog zadatka promišljati je li zadani zadatak pogodan za primjenu kapetanova problema, tj. bi li učenik i "naslijepo" mogao doći do točnog rješenja. Takve mogućnosti treba izbjegavati jer matematika i nastava matematike u svojoj biti se odnose na sasvim suprotne ciljeve od toga (naglasak na razumijevanju, a ne slijepom računu bez razumijevanja).

Zaključak

Naglašavanje iskustva u nastavi matematike da "svaki zadatak ima jedinstveno rješenje koje se dobije kombiniranjem svih zadanih brojčanih podataka" može imati fatalne posljedice. Stoga tradicionalnu nastavu matematike treba obogatiti:

- zadatcima s više rješenja
- zadatcima koji nemaju rješenja

- poticanjem učenika da sami sastavljaju zadatke s više rješenja, koji imaju jedinstveno rješenje i onih koji nemaju rješenja
- zadatcima u kojima se potiče razumijevanje teksta
- poticanjem kritičkog promišljanja o pročitanom tekstu
- ubacivanjem zadataka koji zbunjuju, koji su dvosmisleni i koji zahtijevaju diskusiju i kritiku
- primjerima loših interpretacija i prikaza podataka (npr. iz novina)
- autentičnim zadatcima iz svakodnevice
- projektima i sl.

Primjerice, PISA istraživanje nudi zadatke u kojima se često nalazi višak podataka, a učenik treba sam zaključiti koje od podataka treba uzeti kako bi točno riješio zadatak. Tradicionalna nastava s isključivo pitanjima zatvorenog tipa (Koliko je rješenje? Koliki je x? i sl.) pridonosi prevladavanju rutine i odsustvu razmišljanja prilikom rješavanja tekstualnih zadataka. Stoga bi u nastavu trebalo ubacivati i zadatke otvorenog tipa. Svi ovi zahtjevi se odnose i na udžbeničke sadržaje.

LITERATURA

1/ S. Baruk, *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik.*, Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1989.

2/ H. Freudenthal, *Wie alt ist der Kapitän?* In: mathematiklehren. H. 5, 38–39, 1984.

3/ A. Schoenfeld, *On Mathematics as Sense-Making: An Informal Attack on the Unfortunate Divorce of Formal and Informal Mathematics*. In: James F. Voss et al. (eds.): Informal Reasoning and Education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 311–343, 1991.

4/ Ch. Selter, *Rechnen auf eigenen Wegen*. Schule heute, 4/2004, 8–10, 2004.

5/ L. Verschaffel, B. Greer, & E. De Corte, *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger, 2000.

Ipak: Kapetan ima 53 godine!

Na kraju bih spomenula jedan drugi poznati zadatak tipa "Koliko godina ima kapetan" – ali koji se može riješiti računski. To je zadatak, koji možemo naći pod brojem 58.1 u knjizi *The Stanford Mathematics Problem Book* koju je napisao George Pólya (1974.):

Koliko godina ima kapetan, koliko ima djece i koliko je dug njegov brod ako umnožak ovih triju (cijelih) brojeva iznosi $32\,118$*? Duljina broda je dana u stopama, kapetan ima po nekoliko i sinova i kćeri, ima više godina nego što ima djece, ali ima manje od* 100 *godina.*

Rješenje: Ovaj zadatak svodi se na diofantsku jednadžbu $x \cdot y \cdot z = 32\,118$.

Rastav broja $32\,118$ na proste faktore je $2 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 101$. To znači da se $32\,118$ može dobiti kao umnožak faktora zapisanih u obliku elemenata uređenih trojki (broj djece, broj godina, duljina broda) kao $(6, 53, 101)$, $(3, 101, 106)$, $(3, 53, 202)$, $(2, 101, 159)$, $(2, 53, 303)$ i $(2, 3, 5353)$. Samo neka od ovih rješenja imaju smisla predstavljati broj godina kapetana, broj djece i duljinu broda. S obzirom na to da kapetan ima nekoliko i sinova i kćeri, ukupan broj djece je najmanje 4. Stoga je jedino moguće rješenje trojka $(6, 53, 101)$. Kapetan ima 53 godine.