

Kako prebrojiti kriške pizze ili područja ravnine

Ela Rac Marinić Kragić,
Zagreb



1. Problem rezanja pizze

Razrezivanjem pizze nožem preko središta s tri ravna reza možemo dobiti šest podjednakih kriški pizze. Pomaknimo malo samo jedan rez (dužinu) i dobit ćemo sedam komada različitih veličina i oblika. Lagano možemo utvrditi da je sedam komada najveći broj koji možemo dobiti s tri reza pizze (vidi sliku 1).

Postavlja se pitanje: *koliko najviše komada pizze možemo dobiti s n ravnih rezova?*

Cilj je odrediti najveći broj komada bez obzira na veličinu i oblik.

Tablica za male vrijednosti n

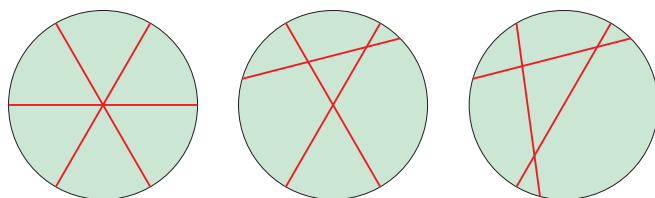
Označimo s $P(n)$ najveći broj komada pizze koji možemo dobiti s n ravnih rezova preko pizze.

Lako ćemo uočiti da vrijedi

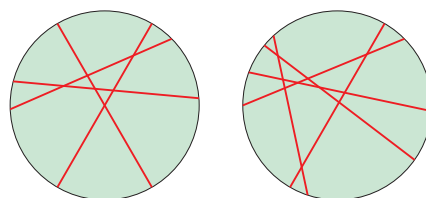
$$P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 4.$$

Nadalje, slike 1 i 2 pomažu nam da zaključimo

$$P(3) = 7, \quad P(4) = 11, \quad P(5) = 16.$$



Slika 1. tri reza



Slika 2. četiri i pet rezova

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(n)$	1	2	4	7	11	16	22	29

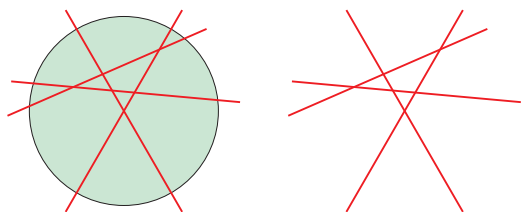
Tablica 1.

Također uočavamo da ćemo najviše komada na-rezati ako svaki rez presijeca sve ostale rezove ali tako da ne prelazi preko točaka presjeka.

Steinerov problem ravninske pizze

Problem presijecanja pizze prvi je razmatrao i riješio švicarski geometar Jacob Steiner (1796.–1863.). On je promatrao ravninu (koju možemo usporediti s beskonačno velikom pizzom), a rezovi su bili pravci. Steiner se upitao: *na koliko najviše područja možemo podijeliti ravninu s n pravaca?*

Na slici 3 možemo vidjeti da je problem presije-canja ravnine ekvivalentan problemu presijecanja pizze. Treba samo rezove pizze (dužine) proširiti u pravce te izbrisati kružnicu koja omeđuje pizzu. Kako je lakše raditi u konačnom okruženju, zadržat ćemo se nadalje na problemu rezanja pizze.



Slika 3.

2. Rješenje s pomoću rekurzije

Usporedimo nizove u tablici 1. Broj područja izno-si 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ... Razlike između sus-jednih vrijednosti iznose 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., dakle $P(1) = P(0) + 1$, $P(2) = P(1) + 2$, ...

$$P(n) = P(n-1) + n, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Ova se rekurzivna relacija lako dokaže i principom matematičke indukcije. Kako smo već uočili, kod najoptimalnijeg rezanja pizze novi rez treba prijeći preko svih prijašnjih rezova (ali ne i preko točaka presjeka). To znači da u koraku indukcije s $k+1$ -vim rezom dobivamo još $k+1$ područje (komad) pizze. Tako dobivamo $P(k+1) = P(k) + (k+1)$ područja, tj. dobit ćemo još toliko područja koliki je ukupan broj rezova.

Formula

Raspišimo rekurzivnu relaciju za slučajeve $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$:

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) + n \\ P(n-1) &= P(n-2) + (n-1) \\ P(n-2) &= P(n-3) + (n-2) \\ &\vdots \\ P(3) &= P(2) + 3 \\ P(2) &= P(1) + 2 \\ P(1) &= P(0) + 1. \end{aligned}$$

Zbrojimo sve jednakosti i oduzmimo. Dobivamo

$$P(n) = P(0) + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n.$$

Iskoristimo formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva i sredimo. Dobivamo formulu $P(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$. Dakle, maksimalan broj komada koje možemo dobiti s n ravnih rezova pizze iznosi

$$P(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \quad (2)$$

3. Rješenje s pomoću metode konačnih diferencija

Metoda konačnih diferencija je numerička metoda koja se koristi u analizi. Tablica 2 je tablica diferencija niza $P(0), P(1), P(2), \dots$. Drugi redak prikazuje niz diferencija članova tog niza. Svaki sljedeći redak nastaje oduzimanjem članova niza iz prethodnog retka.

niz	1	2	4	7	11	16	22	.
prve diferencije	1	2	3	4	5	6	.	
druge diferencije	1	1	1	1	1	.	.	
treće diferencije	0	0	0	0	.	.	.	

Tablica 2.

U retku s trećim diferencijama su same nule. Račun konačnih diferencija kaže da je tada niz $P(0), P(1), P(2), \dots$ polinom stupnja najviše 2, tj.

$$P(n) = An^2 + Bn + C. \quad (3)$$

Iskoristimo poznate vrijednosti od $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$. Dobit ćemo sustav jednačbi

$$\begin{cases} 1 = P(0) = C \\ 2 = P(1) = A + B + C \\ 4 = P(2) = A + 2B + C \end{cases}$$

čije je rješenje upravo $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$, odnosno naša kvadratna funkcija (3) odgovara prethodnom rješenju:

$$P(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Ako se želite malo poigrati ovom metodom, vrlo lako možete naći formulu za, primjerice, sumu prvih n prirodnih brojeva ili sumu kvadrata prvih n prirodnih brojeva itd.

niz	0	1	3	6	10	15	21	.
prve diferencije	1	2	3	4	5	6	.	
druge diferencije	1	1	1	1	1	.	.	
treće diferencije	0	0	0	0	.	.	.	

Tablica 3: tablica diferencija
za $S(n) = 0 + 1 + 2 + \dots + n$

Zaključak

Najveći broj područja u kojima pravci dijele ravninu dobit ćemo pravcima u najopćenitijem položaju to jest nikoja dva pravca ne smiju biti usporedna i istom točkom smiju prolaziti najviše dva pravca. Tada najveći broj područja na koje n pravaca dijeli ravninu iznosi

$$\frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

METODIKA NASTAVE MATEMATIKE




13503.

Zdravko Kurnik

Oblici matematičkog mišljenja

pojmovi, aksiomi, postulati, poučci, dokazi

136 str., 17 x 24 cm, tvrdi uvez, dvobojni tisak

www.element.hr

Novo!