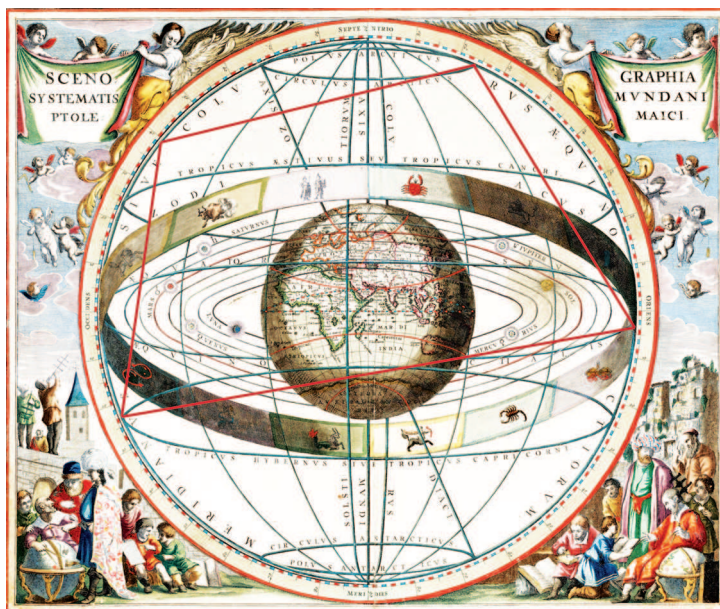


Još jedan dokaz Ptolemejeva teorema

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH



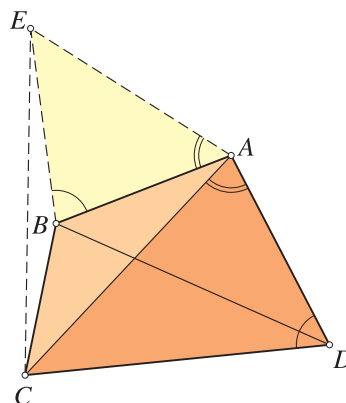
Iz povijesti matematike poznato je da je starogrčki astronom, geograf i matematičar iz 2. stoljeća nove ere, **Ptolemej**¹, u svom poznatom djelu *Almagest* dao dokaz sljedećeg teorema:

Teorem. U svakom konveksnom četverokutu, upisanom u kružnicu, produkt mjernih brojeva dijagonala jednak je zbroju produkata mjernih brojeva njegovih suprotnih stranica.

U [1] i [2] nalaze se četiri razna dokaza ovog teorema. Napomenimo da ovaj teorem ima značajnu primjenu kod rješavanja raznih geometrijskih zadataka u vezi s konveksnim četverokutom. Ovdje ćemo dati još jedan zanimljiv dokaz ovog teorema.

Dokaz. Konstruirat ćemo trokut AEB (slika) koji je sličan trokutu ACD , tj. $\triangle AEB \sim \triangle ACD$ tako da je:

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADC, \quad \sphericalangle EAB = \sphericalangle CAD.$$



¹ Ptolemej (Ptolemaeus Claudius) iz Aleksandrije, tvorac geocentričnog sustava o kretanju planeta, op. a.

Tada vrijedi:

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|DC|} \implies |BE| = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD|}. \quad (1)$$

Zbog činjenice da je $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAD$ i $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|}$ slijedi da je $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$ pa je $\triangle EAC \sim \triangle BAD$. Sada vrijedi:

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|DB|},$$

a odavde

$$|EC| = \frac{|AC| \cdot |DB|}{|AD|}. \quad (2)$$

Razlikovat ćemo sada dva slučaja:

1. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Tada je $\sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA (= \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD) = 180^\circ$ (suprotni kutovi tetivnog četverokuta su suplementni), a odavde zbog $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABE$ slijedi: $\sphericalangle ABE + \sphericalangle CBA = 180^\circ$, što znači da točke C , B i E pripadaju jednom pravcu i vrijedi:

$$|EC| = |BE| + |BC|. \quad (3)$$

Sada iz (1), (2) i (3) dobivamo:

$$\frac{|AC| \cdot |DB|}{|AD|} = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD|} + |BC|,$$

a odavde, nakon množenja sa $|AD|$:

$$|AC| \cdot |DB| = |AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |AD|, \quad (4)$$

što je trebalo dokazati.

2. Neka $ABCD$ nije tetivni četverokut, tj. $\sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA \neq 180^\circ$. Tada je također

$$\sphericalangle ABE + \sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA \neq 180^\circ,$$

što znači da točke E , B i C čine trokut EBC iz kojeg na osnovu nejednakosti trokuta dobivamo:

$$|EC| < |BE| + |BC|. \quad (5)$$

Sada iz (1), (2) i (5) dobivamo:

$$\frac{|AC| \cdot |DB|}{|AD|} < \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD|} + |BC|,$$

a odavde, nakon množenja sa $|AD|$:

$$|AC| \cdot |DB| < |AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |AD|. \quad (6)$$

Iz (4) i (6) slijedi:

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|.$$

Ova se nejednakost u matematičkoj literaturi često naziva **Ptolemejeva nejednakost**.



LITERATURA

- 1/ Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- 2/ Š. Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
- 3/ O. Bottema and oth.: *Geometric Inequalities*, olters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.