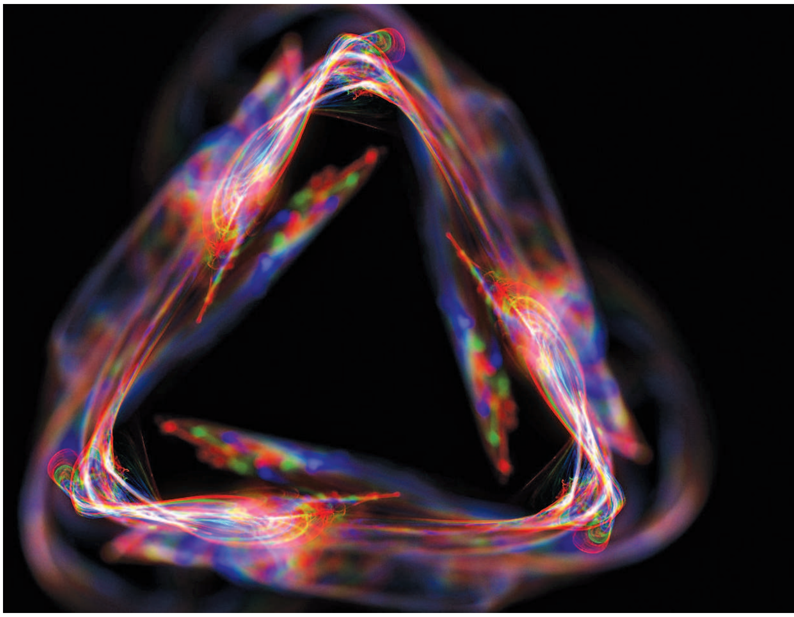
O savršenim trokutima

Bojan Kovačić, Zagreb



"Klasičnim" zadatcima iz analitičke geometrije koji se zadaju u osnovnoj, odnosno srednjoj školi pripadaju i zadatci izračuna opsega i površine trokuta kojemu su zadane duljine svih triju stranica. Numerička vrijednost opsega trokuta obično je različita od numeričke vrijednosti površine trokuta. Stoga je zanimljivo promatrati trokute kojima se te dvije numeričke vrijednosti podudaraju.

Formalno, imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1. Trokut kojemu su duljine stranica prirodni brojevi i kojemu je opseg brojčano jednak površini nazivamo **savršen trokut**.

U ovom ćemo članku riješiti sljedeće probleme:

Problem 1. Odrediti sve nesukladne savršene pravokutne trokute.

Problem 2. Odrediti ukupan broj svih nesukladnih savršenih trokuta i naći duljine njihovih stranica.

Istaknimo da ćemo svaki od ovih problema riješiti zasebno iako rješenje Problema 2 obuhvaća rješenje Problema 1. No, metode rješavanja tih problema značajno se razlikuju, pa je metodički primjereno ukazati na različite metode rješavanja sličnih problema.

Radi preciznosti, vrhove trokuta označavamo s A, B i C, a duljine njima nasuprotnih stranica redom s a, b i c. Istaknimo da "degenerirane" trokute nećemo razmatrati, tj. pretpostavit ćemo da vrijedi relacija $a, b, c \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Rješenje Problema 1

Uobičajeno ćemo pretpostaviti da pravokutan trokut ABC ima pravi kut kod vrha C, odnosno da je c duljina hipotenuze trokuta ABC. Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su stranice trokuta označene tako da vrijedi nejednakost $a \leq b < c$. Površina trokuta ABC dana je izrazom

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b. \qquad (1)$$

Prema Definiciji 1 mora vrijediti jednakost:

$$a + b + c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b. \qquad (2)$$

Kvadriranjem ove jednakosti (primjenom pravila za kvadriranje trinoma) dobivamo:

$$a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^2. \tag{3}$$

Prema pretpostavci, ABC je pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C. Stoga vrijedi Pitagorin poučak:

$$a^2+b^2=c^2. \tag{4}$$

Uvrstimo li jednakost (4) u jednakost (3), dobit ćemo:

$$2\cdot c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^2, \tag{5}$$

odnosno nakon sređivanja

$$2\cdot a\cdot b+2\cdot c\cdot(a+b+c)=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^2. \tag{6}$$

Uvrstimo li jednakost (2) u jednakost (6), dobit ćemo:

$$2\cdot a\cdot b+2\cdot c\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\right)=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^2, \tag{7}$$

odnosno

$$a\cdot b\cdot(c+2)=\frac{1}{4}\cdot a^2\cdot b^2. \tag{8}$$

Zbog pretpostavke $a,b\in\mathbf{N}$, jednakost (8) smijemo podijeliti s $a\cdot b$. Dobivamo:

$$c+2=\frac{1}{4}\cdot a\cdot b, \tag{9}$$

odnosno,

$$c=\frac{1}{4}\cdot a\cdot b-2. \tag{10}$$

Uvrštavanjem jednakosti (10) u jednakost (2) slijedi:

$$\begin{aligned} a+b+\frac{1}{4}\cdot a\cdot b-2&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b,\\ b+\frac{1}{4}\cdot a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot a\cdot b&=-a+2,\\ b-\frac{1}{4}\cdot a\cdot b&=-a+2,\\ b\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot a\right)&=-a+2. \end{aligned} \tag{11}$$

Lako se vidi da za $a=4$ dobivamo jednakost

$$0\cdot b=-2$$

koja nije istinita ni za jedan realan broj b. Stoga jednakost (11) smijemo podijeliti s $1-\frac{1}{4}\cdot a$, pa slijedi:

$$\begin{aligned} b&=\frac{-a+2}{1-\frac{1}{4}\cdot a}=\frac{-a+2}{\frac{4-a}{4}}=4\cdot\frac{a-2}{a-4}\\ &=4\cdot\left(\frac{a-4}{a-4}+\frac{2}{a-4}\right)=4\cdot\left(1+\frac{2}{a-4}\right)\\ &=4+\frac{8}{a-4}. \end{aligned} \tag{12}$$

Iz jednakosti (12) razabiremo da će broj b biti cijeli broj ako i samo ako je izraz $a-4$ jednak nekom cjelobrojnom djelitelju broja 8. Budući da je $a\in\mathbf{N}$, slijedi

$$a-4\geq-3. \tag{13}$$

Svi cjelobrojni djelitelji broja 8 koji su jednaki ili veći od -3 tvore skup

$$S_1=\{-2,-1,1,2,4,8\}. \tag{14}$$

Dakle, mora vrijediti

$$a-4\in\{-2,-1,1,2,4,8\}, \tag{15}$$

odnosno

$$a\in\{2,3,5,6,8,12\}. \tag{16}$$

Za $a\in\{2,3\}$ iz jednakosti (12) slijedi $b\in\{-4,0\}$, što je suprotno pretpostavci $b\in\mathbf{N}$. Tako preostaje $a\in\{5,6,8,12\}$. Uvrštavanjem svake od tih vrijednosti u jednakost (12) slijedi $b\in\{12,8,6,5\}$. Među dobivena četiri uređena para (a,b) biramo samo one za koje vrijedi nejednakost $a\leq b$. To su $(5,12)$ i $(6,8)$.

Uvrštavanjem $a=5$ i $b=12$ u jednakost (10) slijedi $c=13$.

Uvrštavanjem $a=6$ i $b=8$ u jednakost (10) slijedi $c=10$.

Dakle, vrijedi:

$$(a,b,c)\in\{(5,12,13),(6,8,10)\}. \tag{17}$$

Tako smo dokazali sljedeći poučak.

Poučak 1. Postoje točno dva nesukladna savršena pravokutna trokuta. Označimo li duljine njihovih stranica tako da vrijedi nejednakost $a \leq b < c$, onda vrijedi

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}.$$

Time je Problem 1 u potpunosti riješen. ■

Rješenje Problema 2

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su stranice trokuta označene tako da vrijedi nejednakost $a \leq b \leq c$. Označimo sa s poluopseg trokuta ABC, tj. neka je

$$s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c). \tag{18}$$

Tada je površina trokuta ABC dana Heronovom formulom:

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}. \tag{19}$$

Prema definiciji savršenoga trokuta mora vrijediti jednakost

$$P = 2 \cdot s. \tag{20}$$

Uvrštavanjem jednakosti (20) u jednakost (19) dobivamo:

$$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 2 \cdot s. \tag{21}$$

Kvadriranjem jednakosti (21) slijedi:

$$s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) = 4 \cdot s^2. \tag{22}$$

Jednakost (22) smijemo podijeliti sa s jer je s, kao poluzbroj triju prirodnih brojeva, sigurno racionalan broj različit od nule. Tako dobivamo:

$$(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) = 4 \cdot s. \tag{23}$$

Označimo:

$$\begin{cases} x := s - a, \\ y := s - b, \\ z := s - c. \end{cases} \tag{24}$$

Zbrajanjem svih triju jednakosti u skupu jednakosti (24) dobivamo:

$$x+y+z = 3 \cdot s - (a+b+c) = 3 \cdot s - 2 \cdot s = s. \tag{25}$$

Stoga jednakost (23) možemo zapisati u obliku

$$4 \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z. \tag{26}$$

U nastavku nam trebaju sljedeće tri tvrdnje.

Tvrdnja 1. Opseg savršenoga trokuta je nužno paran prirodan broj. Ekvivalentno, poluopseg savršenoga trokuta je nužno prirodan broj, tj. $s \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je opseg savršenoga trokuta neparan prirodan broj. Opseg dobivamo kao zbroj triju prirodnih brojeva. Taj je zbroj neparan prirodan broj ako i samo ako se u njemu pojavljuje neparno mnogo neparnih pribrojnika (tj. pribrojnika koji su neparni prirodni brojevi). To znači ili da su duljine svih triju stranica trokuta neparni prirodni brojevi ili da je duljina točno jedne stranice trokuta neparan prirodan broj. Ako su

$$\begin{cases} a = 2 \cdot k + 1, \\ b = 2 \cdot l + 1, \\ c = 2 \cdot m + 1, \end{cases} \tag{27}$$

za neke $k, l, m \in \mathbf{N}$, onda se lako provjeri da su izrazi s, $s-a$, $s-b$ i $s-c$ neskrativi razlomci kojima je u brojniku neparan prirodan broj, a u nazivniku broj 2. Tada je i umnožak $s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$ neskrativ razlomak kojemu je u brojniku neparan prirodan broj, a u nazivniku broj 16. Odatle slijedi da je $P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ ili iracionalan broj ili neskrativ strogo pozitivan racionalan broj kojemu je u brojniku neparan prirodan broj, a u nazivniku broj 4.

Prema tome, opseg trokuta je neparan prirodan broj, dok je površina ili iracionalan broj ili neskrativ strogo pozitivan racionalan broj. Ta dva broja očito ne mogu biti međusobno jednaka. Tako smo dobili proturječje s pretpostavkom da je trokut savršen. Dakle, ne postoji savršen trokut kojemu su duljine svih triju stranica neparni prirodni brojevi.

Analogno se dokazuje da ne postoji savršen trokut kojemu je duljina točno jedne stranice neparan prirodan broj. Taj dokaz prepuštamo čitatelju. ■

Tvrdnja 2. Za vrijednosti x, y i z definirane jednakostima (24) vrijede relacije:

$$1)\quad x \geq y \geq z > 0; \tag{28}$$

$$2)\quad x, y, z \in \mathbf{N}. \tag{29}$$

Dokaz. Pretpostavili smo da vrijedi nejednakost $a \leq b \leq c$. Množenjem te nejednakosti brojem (-1) dobivamo

$$(-a) \geq (-b) \geq (-c). \tag{30}$$

Svakom članu ove nejednakosti dodamo prirodan broj s (taj broj je prirodan prema Tvrdnji 1), čime se znakovi nejednakosti ne mijenjaju. Tako dobivamo nejednakost

$$s - a \geq s - b \geq s - c, \tag{31}$$

odnosno, prema jednakostima (24),

$$x \geq y \geq z. \tag{32}$$

Pokažimo nejednakost $z > 0$. Za bilo koji trokut ABC vrijedi nejednakost trokuta

$$a + b > c \tag{33}$$

koju možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$a + b - c > 0. \tag{34}$$

Tako je

$$z = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} > 0. \tag{35}$$

Prema jednakostima (24) i Tvrdnji 1, vrijednosti x, y i z su razlike dvaju prirodnih brojeva. Razlika bilo kojih dvaju prirodnih brojeva je uvijek cijeli broj. Dakle, zasigurno je $x, y, z \in \mathbf{Z}$. No, iz nejednakosti (28) slijede nejednakosti $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$. Zbog toga je $x, y, z \in \mathbf{N}$. ■

Tvrdnja 3. $z \in \{1, 2, 3\}$.

Dokaz. Nejednakost (28) možemo zapisati u "proširenom" obliku kao:

$$\begin{cases} x \geq x \\ x \geq y \\ x \geq z \end{cases} \tag{36}$$

Zbrojimo li te tri nejednakosti i rezultat pomnožimo s 4, dobivamo:

$$12 \cdot x \geq 4 \cdot (x + y + z). \tag{37}$$

Pretpostavimo da je $z \geq 4$. Tada iz nejednakosti (28) slijedi $y \geq 4$. Stoga pomnožimo nejednakosti

$$\begin{cases} x \geq x, \\ y \geq 4, \\ z \geq 4, \end{cases} \tag{38}$$

pa dobivamo nejednakost:

$$x \cdot y \cdot z \geq 16 \cdot x. \tag{39}$$

Uvažavajući nejednakosti (37) i (39), te jednakost (26), dobivamo:

$$\begin{aligned} 12 \cdot x \geq 4 \cdot (x + y + z) &= x \cdot y \cdot z \geq 16 \cdot x, \\ 12 \cdot x &\geq 16 \cdot x, \\ 12 \cdot x - 16 \cdot x &\geq 0, \\ (-4) \cdot x &\geq 0 \quad / : (-4) \\ x &\leq 0, \end{aligned}$$

što je proturječno nejednakosti (28). Zbog toga mora biti $z \leq 3$. Budući da je, prema relaciji (29), z prirodan broj, slijedi $z \in \{1, 2, 3\}$. ■

Iz jednakosti (26) izrazimo x:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x + 4 \cdot y + 4 \cdot z &= x \cdot y \cdot z, \\ 4 \cdot (y + z) &= x \cdot (y \cdot z - 4). \end{aligned} \tag{40}$$

Ako bi bilo $y \cdot z = 4$, onda bismo imali

$$(y, z) \in \{(1, 4), (4, 1), (2, 2)\}. \tag{41}$$

Lako se vidi da u svakom od tih triju slučajeva dobivamo linearnu jednadžbu oblika

$$0 \cdot x = d, \tag{42}$$

gdje je $d \in \{16, 20\}$. Ta jednadžba nema realnih rješenja. Stoga izraz (40) smijemo podijeliti izrazom $y \cdot z - 4$, pa dobijemo:

$$x = 4 \cdot \frac{y+z}{y \cdot z - 4}. \tag{43}$$

U izraz (43) najprije uvrstimo $z = 1$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} x &= 4 \cdot \frac{y+1}{y-4} = 4 \cdot \left(\frac{y-4}{y-4} + \frac{5}{y-4}\right) \\ &= 4 \cdot \left(1 + \frac{5}{y-4}\right) = 4 + \frac{20}{y-4}. \end{aligned} \tag{44}$$

Zbog svojstva $x, y \in \mathbf{N}$, provodimo razmatranje analogno onome u rješenju Problema 1. Svi djelitelji broja 20 tvore skup

$$S_2 = \{-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}. \tag{45}$$

Tražimo one elemente skupa S_2 za koje će pripadne vrijednosti varijabli x i y *istodobno* biti prirodni brojevi. Nije teško pokazati da mora vrijediti

$$y - 4 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, \tag{46}$$

odnosno

$$y \in \{5, 6, 8, 9, 14, 24\} \text{ i } x \in \{24, 14, 9, 8, 6, 5\}. \tag{47}$$

Među dobivenim uređenim trojkama (x, y, z) sada biramo one za koje vrijedi nejednakost (28). Bez toga uvjeta dobili bismo parove međusobno sukladnih trokuta, a Problem 2 zahtijeva da traženi savršeni trokuti budu nesukladni. Dobivamo:

$$(x, y, z) \in \{(24, 5, 1), (14, 6, 1), (9, 8, 1)\}. \tag{48}$$

Iz jednakosti (18) i (24) odmah slijedi:

$$\begin{cases} a = s - (s - a) = (x + y + z) - x = y + z, \\ b = s - (s - b) = (x + y + z) - y = x + z, \\ c = s - (s - c) = (x + y + z) - z = x + y. \end{cases} \tag{49}$$

Uvrštavanjem svakoga elementa skupa iz relacije (48) dobije se:

$$(a, b, c) = \{(6, 25, 29), (7, 15, 20), (9, 10, 17)\}. \tag{50}$$

U izraz (43) uvrstimo $z = 2$. Dobivamo

$$\begin{aligned} x &= 4 \cdot \frac{y+2}{2 \cdot y - 4} = 4 \cdot \frac{y+2}{2 \cdot (y-2)} = 2 \cdot \frac{y+2}{y-2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{y-2}{y-2} + \frac{4}{y-2}\right) = 2 \cdot \left(1 + \frac{4}{y-2}\right) \\ &= 2 + \frac{8}{y-2}. \end{aligned} \tag{51}$$

Provodimo razmatranje potpuno analogno onom za slučaj $z = 1$. Svi cjelobrojni djelitelji broja 8 tvore skup

$$S_3 = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}. \tag{52}$$

Zbog uvjeta $x, y \in \mathbf{N}$ mora vrijediti

$$y - 2 \in \{1, 2, 4, 8\}. \tag{53}$$

Odatle slijedi

$$y \in \{3, 4, 6, 10\} \text{ i } x \in \{10, 6, 4, 3\}. \tag{54}$$

Među dobivenim uređenim trojkama (x, y, z) opet biramo one za koje vrijedi nejednakost (28). Dobivamo:

$$(x, y, z) \in \{(10, 3, 2), (6, 4, 2)\}. \tag{55}$$

Iz jednakosti (49) slijedi

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}. \tag{56}$$

Preostaje u izraz (43) uvrstiti $z = 3$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} x &= 4 \cdot \frac{y+3}{3 \cdot y - 4} = \frac{4 \cdot y + 12}{3 \cdot y - 4} \\ &= \frac{\frac{4}{3} \cdot (3 \cdot y - 4)}{3 \cdot y - 4} + \frac{\frac{52}{3}}{3 \cdot y - 4} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{52}{3 \cdot (3 \cdot y - 4)}. \end{aligned} \tag{57}$$

x će biti prirodan broj ako i samo ako je

$$\frac{52}{3 \cdot (3 \cdot y - 4)} \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3} \ldots\right\}, \tag{58}$$

tj. ako i samo ako je

$$\frac{52}{3 \cdot y - 4} \in \{-1, 2, 5, 8 \ldots\}. \tag{59}$$

Zbog $y \in \mathbf{N}$ je sigurno $3 \cdot y - 4 \in \mathbf{Z}$. Svi elementi skupa na desnoj strani relacije (59) su zapravo točno svi elementi aritmetičkoga niza čiji je prvi član $a_1 = -1$, a razlika $d = 3$. Stoga zapravo tražimo koji djelitelji broja 52 su ujedno i članovi uočenoga aritmetičkoga niza.

Svi djelitelji broja 52 tvore skup

$$S_4 = \{-52, -26, -13, -4, \\ -2, -1, 1, 2, 4, 13, 26, 52\}. \quad (60)$$

Opći član promatranoga aritmetičkoga niza jest

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -1 + (n-1) \cdot 3 \\ = -1 + 3 \cdot n - 3 = 3 \cdot n - 4, \quad (61)$$

pri čemu je $n \in \mathbf{N}$.

Lako se pokaže da za

$$B \in \{-52, -26, -13, -4, 1, 4, 13, 52\} \quad (62)$$

linearna jednadžba

$$3 \cdot n - 4 = B \quad (63)$$

nema rješenja u skupu $\mathbf{N}$, odnosno da niti jedan od elemenata skupa iz relacije (62) ne pripada aritmetičkom nizu određenom jednakosti (61). Nije teško ni pokazati da za

$$B \in \{-1, 2, 26\} \quad (64)$$

rješenja jednadžbe (63) tvore skup $\{1, 2, 10\}$. (To zapravo znači da vrijede jednakosti $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ i $a_{10} = 26$.) Stoga vrijednost izraza $3 \cdot y - 4$ mora biti element skupa $\{1, 2, 10\}$.

Lako se provjeri da jednadžbe $3 \cdot y - 4 = 1$ i $3 \cdot y - 4 = 10$ nemaju rješenja u skupu $\mathbf{N}$, te da jednadžba $3 \cdot y - 4 = 2$ ima rješenje $y = 2$ koje pripada skupu $\mathbf{N}$.

Uvrštavanjem $y = 2$ u izraz (51) dobivamo $x = 10$. Dakle, u ovom smo slučaju dobili uređenu trojku $(x, y, z) = (10, 2, 3)$. No, ta uređena trojka ne dolazi u obzir jer za nju ne vrijedi nejednakost (28). Stoga slučaj $z = 3$ ne daje niti jedno rješenje razmatranoga problema.

Time smo iscrpili sve moguće slučajeve i dokazali sljedeći poučak.

Poučak 2. Postoji točno pet nesukladnih savršenih trokuta. Označimo li njihove stranice tako da vrijedi nejednakost $a \le b \le c$, onda je

$$(a,b,c) \in \{(5, 12, 13), (6, 8, 10), \\ (6, 25, 29), (7, 15, 20), (9, 10, 17)\}. \quad (65)$$

Time je Problem 2 u potpunosti riješen.

Zaključno napomenimo da postoji beskonačno mnogo nesukladnih trokuta čije duljine stranica su strogo pozitivni realni brojevi i kojima je opseg brojčano jednak površini. Naime, nije teško pokazati da je skup svih strogo pozitivnih rješenja jednadžbe (26) dan s

$$S_5 = \left\{ \left(x, y, \frac{4 \cdot (x+y)}{x \cdot y - 4} \right) : x > 0, y > \frac{4}{x} \right\}. \quad (66)$$

Za svako od tih rješenja iz jednakosti (49) dobivamo pripadne duljine stranica trokuta. No, takvi slučajevi nisu osobito zanimljivi i ovdje ih nismo razmatrali.

LITERATURA

1/ E. P. Starke: *An old triangle problem*, Mathematics Magazine, 1969.

2/ J. Wilson: *Perfect triangles*, dostupno na internetskoj stranici: `http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Perfect/PerTri.html` (08.07.2013.)

3/ L. Markowitz: *Area = Perimeter*, The Mathematics Teacher, Vol. 74, 1981.

4/ B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.