Zadatci s dijeljenjem
stavljeni u kontekst

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

U MiŠ-u br. 66 bilo je riječi o problematici tekstualnih zadataka u nastavi matematike. Posebna pozornost tu je stavljena na tzv. zadatke s kontekstom. To su zadatci u kojima je problem stavljen u neku realističnu situaciju. Primjerice, u zadatku $2+3=\_\_$ možemo reći da nema konteksta (ili da je situacija unutarmatematička), dok je u zadatku "Ivan ima 2 jabuke, a Ana tri. Koliko imaju zajedno?" to isto zbrajanje $2+3$ stavljeno u kontekst s djecom i jabukama. Ovakvi tekstualni zadatci koji imitiraju svakodnevne situacije uobičajeni su u nastavi matematike.

Jasno je da tekstualni zadatci pred učenike stavljaju dodatne zahtjeve jer tekst treba pročitati s razumijevanjem, promisliti koju računsku operaciju ili matematički model treba primijeniti, izračunati zadatak te promisliti o rješenju i napisati odgovor koji je u skladu s početnim pitanjem. Na taj način zatvara se tzv. krug matematizacije[1].

Unatoč tome, tekstualni zadatci upravo služe tome da učenik mora razumjeti tekst kako bi riješio problem. Dobar primjer za to su različiti zadatci kod dijeljenja s ostatkom kod kojih nepotpuni količnik trebamo nekad povećati za jedan, a nekad ne, ovisno upravo o kontekstu zadatka. U ovom članku bit će riječi upravo o takvim tipovima zadataka.

Problem s punim bocama

Krenimo s klasičnim problemom pretakanja, u kojem se koristi dijeljenje.

U bačvi je 100 l vina. Koliko se boca od 7 dl može do vrha napuniti vinom iz bačve?

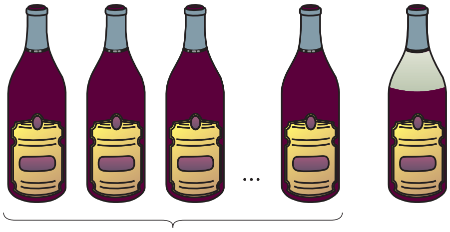
Pretvorimo li litre u decilitre i podijelimo 1000 dl sa 7 dl dobit ćemo 142 i ostatak 6. To znači da se 1000 dl vina može pretočiti u 142 boce od po 7 dl, i još će ostati 6 dl vina. S obzirom na to da se traži broj boca punih do vrha, odgovor je 142. U ovom zadatku ostatak nam nije bio važan za konačan rezultat, ali je važno učenika pitati npr. "Što nam predstavlja ovaj ostatak 6 u priči o bocama i bačvi?" Cilj je da učenik, s obzirom na kontekst, razumije ulogu svakog broja koji se pojavljuje u ovoj operaciji dijeljenja pa tako i ostatka od 6 dl čime

[1] Detaljnije o krugu matematizacije pogledati, primjerice, u PISA *frameworku*.

se ne bi mogla napuniti puna boca. To je dobra osnova za daljnju diskusiju, primjerice: *A što da je u boci bilo 1001 dl vina, tj. 1 dl više? Odgovori bez ponovnog dijeljenja, samo promatranjem računa "1000 : 7 = 142 i ostatak 6. Objasni!"*

Prikazani način odnosio se na dijeljenje s prirodnim brojevima, ali zgodno je ovaj zadatak ponoviti i kod dijeljenja decimalnih brojeva (kako džepnim računalom tako i pisanim postupkom). Podijelimo li 100 s 0.7 dobit ćemo količnik 142.85714... I ovdje je važno da učenik zna interpretirati što znači cijeli, a što decimalni dio količnika. Tu se pak može razviti diskusija kada je bolje računati s prirodnim brojevima (npr. kada nas zanima koliki je točno ostatak), a kada s decimalnim brojevima (npr. pri upotrebi džepnog računala za brze izračune stvarnih podataka u kojima nas zanima samo količnik).

Ove ideje imaju cilj naglasiti da znati dijeliti u osnovnoj školi ne znači samo savladati algoritam pisanog dijeljenja, već znati interpretirati svaki broj u dijeljenju s obzirom na dani kontekst te znati matematičkim argumentima objasniti pitanja tipa "Što bi bilo kad..." Za dopunsku i redovnu nastavu također je zgodno slikovno prikazati danu situaciju:



142 do vrha napunjene boce

Problem s novcem

U prethodnom zadatku pitanje je bilo takvo da se tražio samo nepotpuni količnik. Drugim riječima, količnik zapisan u decimalnom obliku je trebalo zaokružiti na manje cijelo. No, nekad nam kontekst zadatka diktira da količnik treba ostaviti u decimalnom zapisu, primjerice na dvije decimale. Evo primjera za to:

Petorica prijatelja otišli su zajedno na ručak koji su ukupno platili 377 kn. Odlučili su ovu svotu ravnomjerno podijeliti između sebe. Koliko je svaki od njih trebao dati za ručak?

Dijeljenjem 377 s 5 dobivamo da je svaki prijatelj trebao dati točno 75.4 kn, tj. 75 kn 40 lp. Kod ovog zadatka nismo zaokruživali na 75 jer tada ukupni račun ne bi dosegao 377 kn. Ovdje je zanimljivo načeti i diskusiju s učenicima je li za ovaj zadatak bolje računati pisano (tako da dobijemo ostatak) ili količnik prikazati u decimalnom obliku. Dobro je komentirati i kada nam ostatak treba, a kada nam je zgodnije imati decimalni broj. Također, korisne su i slobodnije diskusije poput "A što da je račun bio 377 kn, ali prijatelja je bilo 6? Tada bi količnik iznosio 62.8333... kn. Kako bi se u tom slučaju prijatelji mogli dogovorili? Odgovori i objasni."

Problem s autobusima

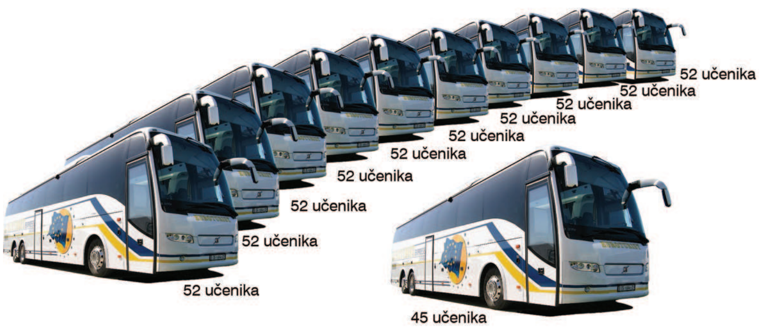
Sljedeći problem s dijeljenjem odnosi se na klasični zadatak s autobusima za školsku ekskurziju.

Cijela Lukina škola ide na zajednički izlet autobusima. U školi je ukupno 565 učenika i nastavnika. Agencija im je ponudila autobuse s 52 sjedala. Koliko takvih autobusa će biti potrebno za izlet?

Podijelimo li 565 s 52 dobit ćemo količnik 10 i ostatak 45. To znači da će za izlet trebati 10 punih autobusa i još jedan s 45 ispunjenih mjesta. Dakle, ostatak nam u ovom slučaju govori da je ukupno potrebno 11 autobusa, a ne 10 (koliki je nepotpuni količnik). Ovaj primjer nas upozorava da je važno razumjeti zadatak iz svakodnevnog života i nakon dijeljenja dobro promisliti o pitanju. I ovaj zadatak nas navodi na diskusiju i zahtjeve argumentiranja i interpretiranja poput, primjerice:

- Objasni zašto si dijelio, a ne npr. oduzimao.
- Što znači ostatak 45 u ovom zadatku?
- Ana tvrdi da je potrebno 10 autobusa, a Luka da ih je potrebno 11. Objasni tko je u pravu.
- Koliko roditelja bismo mogli povesti kao pratnju na izlet tako da sva sjedala u autobusima budu ispunjena? Objasni.
- Koliko autobusa će biti potrebno ako znamo da osmero djece i jedan nastavnik neće ići na izlet? Objasni.

I ovaj zadatak poželjno je ponoviti kod dijeljenja decimalnih brojeva, posebice za dijeljenje s pomoću džepnog računala jer je to, budimo realni, zadatak iz svakodnevice koji će učenici u životu najčešće upravo tako rješavati (uz eventualnu procjenu napamet). I ovdje je korisno komentirati što predstavljaju dijelovi količnika 10.865384... Za dopunsku i redovnu nastavu također je zgodno slikovno prikazati danu situaciju:



Također, dobro je prodiskutirati s razredom o realnijim situacijama. Naime, kada bismo u stvarnosti i imali ovaj problem, neće se uvijek dogoditi da se svih 10 autobusa prvo puni do kraja pa se tek tada otvara jedanaesti bus za preostalih 45 putnika. Obično se u zadnjem autobusu broj putnika poveća tako da u svakom autobusu bude otprilike jednako mnogo putnika. (Ovo je još jedna ideja za naknadnu diskusiju: kako spomenutih 565 učenika smjestiti u 11 autobusa, što prirodno otvara nove matematičke teme, poput Dirichletova principa.)

Međunarodna ispitivanja vezana uz problem s autobusima

Ostanimo još malo na tzv. problemu s autobusima. To je poznat problem o kojem je vođeno dosta diskusija, upravo zbog važnosti konteksta za rješenje zadatka. Moguće je da je neki učenik potpuno savladao postupak pisanog dijeljenja i točno podijelio, ali to još uvijek ne znači da je točno odgovorio na pitanje iz zadatka. Zato je zanimljivo ovu temu dublje analizirati. Sljedeći zadatak s autobusima bio je uključen u nacionalna ispitivanja učenika 13–14 godina starosti u, primjerice, Njemačkoj 2004. godine i u SAD-u[2] 1982. godine. Zadatak s ispitivanja je glasio:

> *1128 učenika neke škole treba odvesti na sportsku priredbu. Svaki školski autobus ima 36 mjesta za učenike. Koliko autobusa je potrebno kako bi se svi učenici dovezli na priredbu?*

Točan odgovor (32 autobusa) dalo je 38 % njemačkih ispitanika i 23 % ispitanika iz SAD-a (Tablica 1). Oko 20 % ispitanika iz obje zemlje je dobro podijelilo 1128 s 36, ali kao rezultat su naveli nepotpuni količnik 31. Ostali netočni rezultati se uglavnom

Tablica 1. Odgovori na zadatak s autobusom

	Njemačka	SAD
Točno odgovorili (32 autobusa)	38 %	23 %
Točno dijeljenje, ali krivo zaokružen rezultat (31 autobus)	23 %	19 %
Odgovor: 31 i ostatak 12	(nema podataka)	29 %
Ostali netočni odgovori (kriva računska operacija i sl.)	40 %	29 %

[2] Izvor: Prediger, S. (2009): *Zur Bedeutung vielfältiger Theorien und wissenschaftlicher Praktiken in der Mathematikdidaktik am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben*. Izašlo u: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, WTM Verlag, Münster, str. 49–56.

odnose na netočnu računsku operaciju primijenjenu u zadatku (npr. oduzimanje) i njemački ispitanici su zastupljeni s čak 40 %, a američki s 29 % u netočnim odgovorima.

Prediger (2009.) diskutira o rezultatima i analizira moguće razloge za neuspjeh. Pritom se iskristaliziralo nekoliko faktora koji su zasigurno imali utjecaj na loše rezultate: loše čitalačke kompetencije, deficit u aktiviranju osnovnih matematičkih ideja, istreniranost za rutine, nedostatak promišljanja kod realističnih zadataka te uvriježeni socio-matematički postupci u nastavi matematike.

Loše čitalačke kompetencije odnose se na problem da učenici uopće ne čitaju ili nemaju strpljenja čitati, pogotovo duže tekstove (iako zadatak s autobusima nema duži tekst).

Deficit u aktiviranju osnovnih matematičkih ideja odnosi se na odabir krive računske operacije (čak 40 % kod njemačkih i 29 % kod američkih ispitanika). Naime, ovdje je bio očit problem u pronalasku matematičkog modela za rješavanje jedne jednostavne realistične situacije opisane u zadatku.

Istreniranost za rutine odnosi se na one ispitanike koji su točno podijelili i dobili količnik u decimalnom obliku 31.33. Međutim, taj su količnik zatim poznatim pravilom za zaokruživanje zaokružili na 31 (jer se radi o broju manjem od 31.5). Ovdje se ubrajaju i oni ispitanici koji su dijelili pisanim postupkom te su za rezultat istaknuli samo nepotpuni količnik 31. Ovi ispitanici posjeduju izvježbane rutine, ali ih ne povezuju dovoljno s kontekstom zadatka već se ograničeno kreću samo unutar istreniranih algoritama.

Jedan od razloga za neuspjeh može biti i nedostatak učeničkog iskustva s promišljanjem kod realističnih zadataka. Tradicionalno u metodici matematike postoje postupci kako sistematično pristupiti rješavanju tekstualnih zadataka s kontekstom, ali često je u nastavi (i za domaću zadaću) cilj riješiti što više zadataka. A pristup promišljanju o rješenju zadatka s kontekstom zahtijeva vrijeme. Zbog toga se često preskače ovaj važan dio i to dovodi do problema u rješavanju realističnih zadataka.

Zadnji spomenuti razlog dovodi do pitanja oko uvriježenih tzv. socio-matematičkih postupaka i normi u nastavi matematike. Naime, jedno je nešto pročitati o promjeni aktivnosti i postupaka u nastavi, a drugo je to dosljedno i primjenjivati. Pogotovo ako je tradicija poučavanja matematike na tradicionalan način vrlo jaka u nekoj sredini. Razlog za ukupno 62 % ispitanika s netočnim rezultatom u Njemačkoj i čak 77 % u SAD-u nije kognitivne prirode, već leži prvenstveno u uvriježenim socio-matematičkim postupcima s tekstualnim realističnim zadatcima iz nastavne prakse.

Prediger (2009.) zaključuje da se problemu rješavanja zadatka s autobusima treba ozbiljno pristupiti s više strana, uzimajući u obzir sve navedene razloge.

Prijedlozi za nastavu

Razlozi i pristupi spomenuti u prethodnom poglavlju otvaraju nove ideje za aktivnosti na nastavi matematike, s ciljem poticanja promišljanja pri rješavanju tekstualnih zadataka s kontekstom. U zadatku s autobusima ili s bocama važno je znati dijeliti, ali je jednako tako važno znati i interpretirati (rastumačiti) što koji broj u dijeljenju znači, te dati argumente na pitanja tipa "Što bi bilo kad...". To vrijedi i za sve ostale matematičke zadatke s kontekstom.

Također, važno je nakon rješavanja svih triju gore danih primjera na nastavi dati učenicima izmiješane zadatke svih triju tipova kako bi mogli promišljati o modelu koji trebaju primijeniti u svakom zadatku. Pritom također treba paziti da učenik ne počne vjerovati da kontekst uvijek diktira model. Primjerice, loš odabir mješovitih zadataka mogao bi dovesti do zaključka da, čim se u zadatku spominju boce i pretakanje, nepotpuni količnik ne treba uvećati za jedan, a kada se spominju autobusi, onda ga treba povećati. To nije točno, može se zadati zadatak s bocama u kojem treba nepotpunom količniku pribrojiti 1. Primjerice:

U bačvi je 100 l vina. Koliko je najmanje boca od 7 dl potrebno da se sve vino iz bačve rastoči u boce?

Isto tako, kontekst s autobusima može ukazivati na drukčiji model. Primjerice:

U 5.b razredu je 20 učenika. Svi su odlučili ići na izlet autobusom. Cijena autobusa je 1010 kn. Koliko svaki učenik treba platiti izlet?

U nastavku se nalaze neki prijedlozi mješovitih zadataka za samostalan rad učenika (može i u paru te grupni rad) koji bi se mogli rješavati nakon obrađenih tipičnih primjera i pripadajuće diskusije. Naravno da rastakanje tekućine i autobusi nisu jedini konteksti s kojima se može sastaviti zadatak. Evo nekoliko primjera:

- Baka je spremala zimnicu. U svaku teglicu stavila je po 6 ukiseljenih paprika.
  a) Koliko je teglica trebala ako je kupila ukupno 20 komada paprika, otprilike jednake veličine?
  b) Hoće li sve teglice biti napunjene do vrha? Objasni.
  c) Nacrtaj sliku.
- Mlinar 250 kg brašna treba razdijeliti u vrećice od po 4 kg.
  a) Koliko će takvih vrećica biti potrebno?
  b) Koliko bi takvih vrećica bilo potrebno za 251 kg brašna? Odgovori koristeći rezultat iz a) zadatka i objasni.
  c) Koliko bi takvih vrećica bilo potrebno za 249 kg brašna? Objasni.
- Šest razreda ide na školsku ekskurziju. Radi se o ukupno 136 učenika i nastavnika. Agencija im je ponudila autobuse s 56 i 68 sjedala. Koliko autobusa s 56, a koliko sa 68 će biti potrebno za ekskurziju?
- Za izradu jedne jastučnice potrebno je 18 dm^2 platna.
  a) Koliko se jastučnica može napraviti od 100 dm^2 platna?
  b) Koliko se jastučnica može napraviti od 101 dm^2 platna? Što je različito, a što jednako u odnosu na a) zadatak? Objasni.
- U 5.a i 5.b razredu ukupno je 50 učenika. Svi su odlučili ići na izlet u Hrvatsko zagorje autobusom. Autobuse su platili 1400 kn, ulaznice u muzej i ručak svaki po 100 kn, a vodiča puta 200 kn. Koliko je svaki učenik trebao platiti izlet?
- Ivan, Marko, Nino i Matija su radeći preko ljeta zaradili ukupno 746 kn. Odlučili su taj novac podijeliti na jednake dijelove. Ivan tvrdi da svatko treba dobiti 186 kn 50 lp, Marko tvrdi da svatko treba dobiti 186 kn, Matija tvrdi da svatko treba dobiti 187 kn, a Nino tvrdi da svatko treba dobiti 186.5 kn. Tko je u pravu? Objasni.
- Zadano je dijeljenje $342 : 24$. Osmisli što zabavniji zadatak iz svakodnevice vezan za ovo dijeljenje tako da:
  a) Odgovor na pitanje iz zadatka bude broj 14;
  b) Odgovor na pitanje iz zadatka bude broj 14.25;
  c) Odgovor na pitanje iz zadatka bude broj 15.

Premalo autentičnih zadataka

Svi do sada navedeni zadatci imaju tzv. realističan kontekst. To znači da imitiraju svakodnevne situacije. Naime, dječaci Ivan, Marko, Nino i Matija iz prethodnog seta zadataka su izmišljeni, jednako kao i spomenuti razredi koji autobusom idu na izlet. No, osim realističnih zadataka postoje i tzv. autentični zadatci. To su zadatci koji uistinu dolaze iz svakodnevnih situacija. Primjerice, kada razred ide na izlet, nastavnik ili agencija sami izračunavaju cijenu puta. Bilo bi korisno pritom u izračun, barem dijelom, uključiti i učenike. Također, nekim će učenicima biti od velike koristi ako na sat donesemo bocu od 2 l punu vode i plastične čaše pa procjenjujemo, računamo i eksperimentiramo na zadatcima s rastakanjem tekućine. Stvarno dijeljenje određene svote novca na jednake dijelove također može biti autentično. To su zgodni primjeri za timski rad i manje učeničke projekte.

Pokazalo se da autentični zadatci u mnogo većoj mjeri motiviraju učenike u odnosu na realistične zadatke u kojima je situacija izmišljena. Kroz zadatke s autentičnim kontekstom učenici vide veću važnost i korist matematike koju uče i više su motivirani.

Zadatci s državne mature

Zadatci s dijeljenjem u kontekstu, doduše u nešto složenijem obliku nego što su prikazani ranije u ovom članku, pojavljuju se i na osnovnoj razini državne mature za matematiku. Ovdje donosim neke primjere[3]. U ljetnom roku šk. godine 2011./12. je na osnovnoj razini u zadatku 26.2 bilo postavljeno pitanje vezano uz dijeljenje u kontekstu:

Zadatak 26.2
(Ljetni rok 2012., osnovna razina):

26. Radionica tijekom proizvodnje ima mjesečni trošak od 300 kuna i za svaki proizvedeni artikl trošak od 4.50 kuna.

26.2 Koliko je najmanje artikala radionica proizvela ako je mjesečni trošak radionice bio veći od 2900 kuna?

Odgovor: ______________________

Točan odgovor na ovo pitanje s mature dalo je samo 25 % ispitanih gimnazijalaca te 14 % ispitanika iz strukovnih škola[4]. Ovi rezultati ukazuju da i naši učenici imaju velikih problema sa zadatcima s dijeljenjem koji su stavljeni u kontekst.

Slijedi još nekoliko zadataka s državne mature (osnovna razina) koji su vezani uz problem dijeljenja u kontekstu:

Jesenski rok 2013., osnovna razina, zadatak 6:

6. U kutiji se nalazi 12 boca ulja. Obujam (volumen) svake boce je 750 ml. Koliko je najmanje potrebno spremnika obujma 1000 L u koje bismo pretočili ulje iz 500 takvih kutija?

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 9

Zimski rok 2012., osnovna razina, zadatak 8:

8. Tvrtka ima 1564 klijenata. Svakomu od njih treba poslati reklamni materijal. Procijenjeno je da se za 3 minute može spakirati materijal za jednog klijenta. Koliko najmanje zaposlenika treba istodobno raditi da bi za 8 radnih sati završili pakiranje?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Jesenski rok 2010., osnovna razina, zadatak 15:

15. Pod površine 15 m^2 treba popločiti pločicama kvadratnog oblika stranice duljine 32 cm. Pločice se prodaju isključivo u paketima. U jednome paketu je 12 pločica. Koliko najmanje paketa treba kupiti da bi se popločio pod?

A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14

Zaključak

U ovom tekstu prikazani su zadatci s dijeljenjem koji su stavljeni u različite realistične kontekste. Iako se svi zadatci odnose na dijeljenje, cilj je bio ukazati da provođenje algoritma pisanog dijeljenja nije jedini cilj koji bi učenici trebali savladati u cjelini vezanoj uz dijeljenje. Naime, različita pitanja iz tekstualnih zadataka s kontekstom mogu upućivati na različite interpretacije količnika i ostatka pri dijeljenju. Osim toga, čitalačka kompetencija treba se poticati u svakom predmetu pa tako i u matematici, između ostaloga, upravo preko tekstualnih zadataka.

Na primjeru dijeljenja u zadatcima s kontekstom vidljivo je koliko je važno sa strane metodike matematike promišljati o primjerima i problemima iz prakse te ih pokušati prvo razumjeti i opisati, a zatim se i uhvatiti u koštac s njima. Važno je da nastavnik matematike učenike suoči s ovakvim primjerima, da im ukaže na probleme s dijeljenjem u kontekstu te ih pusti da sami istražuju (po mogućnosti i na autentičnim situacijama), da diskutiraju i promišljaju o rješenju. Svakako, neki od zadataka ovog tipa trebali bi u osnovnoj školi biti i **sastavni dio ispita znanja** iz cjelina *Skup prirodnih brojeva* te cjeline *Decimalni brojevi*.

[3] Zahvaljujem kolegici Željki Dijanić, prof., na odabiru tipičnih zadataka s Državne mature vezanih uz problematiku ovog članka. Izvor zadataka: `http://www.ncvvo.hr` (dostupno dana 13. 9. 2013.)
[4] Zahvaljujem kolegi Zlatku Zadelju, prof., iz NCVVO-a na podacima. Izvori: `dokumenti.ncvvo.hr/Matura_11_12/Distraktori/MATB.zip` i `dokumenti.ncvvo.hr/Dokumenti_centra/DM2012/Ispiti/statisticka_psihometrijska_analiza_dm.pdf`