Lančanica

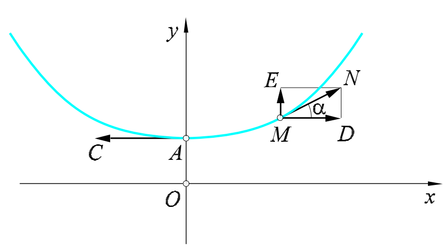
Željko Hanjš, Zagreb

Na prvoj strani omota ovog broja MIŠ-a primijetili ste paukovu mrežu poslije kiše. Kapljice rose tvore krivulje zanimljivog oblika. Na prvi pogled izgleda kako bi to mogle biti parabole. No, jesu li? Odgovor je — nisu.

Riječ je o krivulji čiji oblik poprimaju električni vodovi između dvaju stupova, čelična užad visećeg mosta ili pak lanac ovješen o dva svoja kraja. I baš po lancu, ta se krivulja zove **lančanica**.

Potražimo njezinu jednadžbu.

Odaberimo os simetrije krivulje za os ordinata, a os apscisa položimo za $|OA|$ udaljenu od tjemena, s tim da dalje slobodno odabiremo veličinu tog odreska.



Uočimo luk $\overset{\frown}{AM}$ od tjemena A do neke točke $M(x, y)$ lančanice. Budući da se nit nalazi u stanju ravnoteže, luk $\overset{\frown}{AM}$ možemo smatrati kao čvrsto tijelo podvrgnuto djelovanju triju sila: sile $\vec{T}$ napetosti niti u točki A, usmjerenu po tangenti AC; sile $\vec{t}$ napetosti niti u točki M, usmjerenu po tangenti MN i na kraju, sile $\vec{P}$ koja je jednaka težini odreska $\overset{\frown}{AM}$ niti. Ako duljinu luka označimo sa S, a linearnu specifičnu težinu sa γ, tada je $P = \gamma S$.

Rastavimo silu $\vec{t}$ na komponente $\overrightarrow{ME}$ i $\overrightarrow{MD}$. Tada dobivamo:

$$|ME| = t \sin\alpha,$$
$$|MD| = t \cos\alpha.$$

Budući da je nit u ravnoteži, vrijedi:

$$t \sin\alpha = \gamma S,$$
$$t \cos\alpha = T.$$

Podijelimo li prvu od tih jednadžbi s drugom, dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\gamma}{T}S.$$

Zamijenimo li $\operatorname{tg}\alpha$ sa $\frac{dy}{dx}$ i označimo li $\frac{T}{\gamma}$ sa a, imamo

$$S = a\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Dobivena relacija omogućuje geometrijsku definiciju lančanice kao krivulje čija *je duljina luka, mjerena od tjemena do po volji odabrane točke, proporcionalna koeficijentu smjera tangente položene u krajnjoj točki luka.*

Derivirajući jednakost (1) po x dobivamo

$$\frac{dS}{dx} = a\frac{d^2y}{dx^2},$$

odakle, budući da je $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, dobivamo diferencijalnu jednadžbu lančanice u obliku

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{2}$$

Uvrstimo li $\frac{dy}{dx} = p$ i $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, dobivamo $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$. Ako ovu jednadžbu integriramo, dobit ćemo

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C.$$

Budući da je koordinatni sustav izabran tako da je za $x = 0$, $p = 0$, bit će i $C = 0$. Potenciranjem dobivamo $p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}}$, odakle je

$$p = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

Zamijenimo li p sa $\frac{dy}{dx}$ i ponovo integriramo, dobivamo

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_1.$$

Iskoristimo li slobodu izbora veličine početne ordinate $|OA|$, kako smo spomenuli, uzmimo $|OA| = a$. Samim tim smo uveli početni uvjet $y = a$ za $x = 0$, zahvaljujući čemu je $C_1 = 0$.

Prema tome jednadžba lančanice može imati ovaj zapis:

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \tag{3}$$

ili, u obliku hiperbolne funkcije ch,

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}. \tag{4}$$

* * *

Jedan od klasičnih zadataka Računa varijacija jest traženje krivulje koja spaja dvije zadane točke i čijom se rotacijom oko danog pravca dobije ploha minimalne površine. Euler je 1744. pokazao da je ta krivulja lančanica. Rotacijska ploha zove se **katenoida**.

Uronimo li dva jednaka metalna prstena u sapunicu, pa ih potom izvadimo i razdvojimo, sapunica će između prstena tvoriti plohu oblika katenoide.