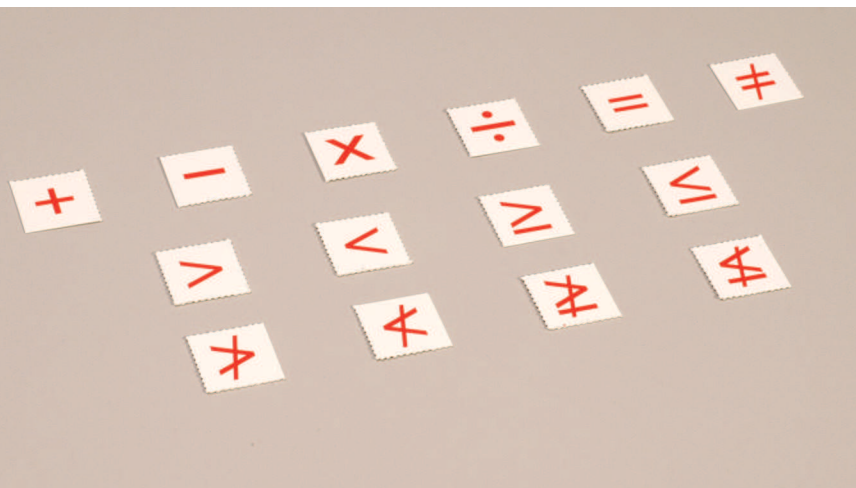


Jedna algebarska nejednakost i njena generalizacija



Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

U ovom ćemo članku dati jednu algebarsku nejednakost kao i njeno poboljšanje, a na kraju i generalizaciju te poboljšane nejednakosti. Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} > \frac{4}{a+b+c+d}; \quad (a, b, c, d > 0). \quad (1)$$

Dokaz: Kako je za $a, b, c, d > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b+c} &> \frac{1}{a+b+c+d}, \\ \frac{1}{a+b+d} &> \frac{1}{a+b+c+d}, \\ \frac{1}{a+c+d} &> \frac{1}{a+b+c+d}, \\ \frac{1}{b+c+d} &> \frac{1}{a+b+c+d}, \end{aligned}$$

nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobivamo nejednakost (1).

Uočavamo da u nejednakosti (1) vrijedi stroga nejednakost što nas upućuje na zaključak da se ova

nejednakost može poboljšati (pooštriti). Ustvari dokazat ćemo da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}; \quad (a, b, c, d > 0) \quad (2)$$

koja je očigledno jača (bolja) od nejednakosti (1) jer vrijedi:

$$\frac{16}{3(a+b+c+d)} > \frac{4}{a+b+c+d}.$$

Sada ćemo dati dva dokaza nejednakosti (2).

Dokaz 1. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za četiri pozitivna broja, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \right) \\ \geq \frac{4}{\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d}}, \end{aligned}$$

a odavde

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{a+b+c+a+b+d+a+c+d+b+c+d},$$

odnosno

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)},$$

a ovo je nejednakost (2).

Vrijedi jednakost u (2) ako i samo ako je: $a+b+c = a+b+d = a+c+d = b+c+d$, tj. $a = b = c = d$.

Dokaz 2. Koristit ćemo nejednakost Cauchy-Bunjakovski-Schwartza i dobivamo:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a+b+c}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b+d}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+c+d}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c+d}} \right)^2 \right] \cdot \left[(\sqrt{a+b+c})^2 + (\sqrt{a+b+d})^2 + (\sqrt{a+c+d})^2 + (\sqrt{b+c+d})^2 \right] \\ & \geq \left(\frac{1}{\sqrt{a+b+c}} \cdot \sqrt{a+b+c} + \frac{1}{\sqrt{a+b+d}} \cdot \sqrt{a+b+d} + \frac{1}{\sqrt{a+c+d}} \cdot \sqrt{a+c+d} + \frac{1}{\sqrt{b+c+d}} \cdot \sqrt{b+c+d} \right)^2 \end{aligned}$$

a odavde

$$\left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \right) \cdot (a+b+c+a+b+d+a+c+d+b+c+d) \geq (1+1+1+1)^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \right) \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)},$$

a ovo je nejednakost (2).

Na sličan način se dokaže da vrijedi nejednakost

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b+c+d} + \frac{1}{a+b+c+e} + \frac{1}{a+b+d+e} \\ & + \frac{1}{a+c+d+e} + \frac{1}{b+c+d+e} \\ & \geq \frac{25}{4(a+b+c+d+e)} \quad (a, b, c, d, e > 0), \end{aligned} \quad (3)$$

kao i generalizacija nejednakosti (2) i (3), tj.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}} + \frac{1}{a_1+a_3+\dots+a_{n-1}+a_n} \\ & + \frac{1}{a_1+a_2+a_4+\dots+a_{n-1}+a_n} \\ & + \frac{1}{a_1+a_2+a_3+a_5+\dots+a_{n-1}+a_n} + \dots \\ & + \frac{1}{a_2+a_3+\dots+a_{n-1}+a_n} \\ & \geq \frac{n^2}{(n-1)(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}+a_n)} \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n) \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Vrijedi jednakost u (4) ako i samo ako je $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a_n$.

LITERATURA

- 1/ Š. Arslanagić: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
- 2/ Š. Arslanagić: *Matematička čitanka 5*, Garfičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.