Neki jednostavni nelinearni regresijski modeli (3. dio)

Kristina Matijević, Požega
Bojan Kovačić, Zagreb

3. Model jednostavne potencijske regresije (POWER)*

Standardni oblik jednadžbe modela potencijske regresije je:

$$\hat{y} = b \cdot x^a. \qquad (1)$$

Pritom pretpostavljamo da su $b > 0$ i $a \neq 0$ realni parametri. Primijetimo da bismo za $a = 0$ ponovno dobili konstantnu funkciju $\hat{y} = b$.

Podsjetimo da se, za proizvoljan, ali fiksiran realan broj $a \in \mathbf{R}$, realna funkcija $f(x) = x^a$ naziva **opća potencija**. Njezino je prirodno područje definicije skup $\langle 0, +\infty \rangle$, pa (analogno kao i u modelu jednostavne logaritamske regresije) vrijednosti varijable x moraju biti strogo pozitivni realni brojevi.

Navedimo statističke interpretacije parametara a i b. Iz (1) lako slijedi

$$\hat{y} = b \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = 1. \qquad (2)$$

Stoga se parametar b interpretira kao očekivana vrijednost varijable y za $x = 1$.

Interpretacija parametra a proizlazi iz sljedeće propozicije:

Propozicija 1. Neka je $p > -100$ proizvoljan, ali fiksiran realan broj. Ako se vrijednost varijable x promijeni za $p\%$, očekivana prosječna relativna promjena vrijednosti varijable y iznosi

$$s = \left\{100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a - 1\right]\right\}\%. \qquad (3)$$

Dokaz. Neka je x_1 početna vrijednost varijable x. Pripadna očekivana vrijednost varijable y jednaka je:

$$\hat{y}_1 = b \cdot x_1^a. \qquad (4)$$

* Engleska riječ *power* ima više značenja, a jedno od njih je i *potencija*. Stoga je naziv ovoga modela preveden kao *potencijski*. Uobičajeni hrvatski prijevod naziva modela (*dvostruko logaritamski*) potječe od činjenice da se u tzv. *linearizaciji* modela (svođenju modela odgovarajućim zamjenama na model jednostavne linearne regresije) vrijednosti varijabla x i y pojavljuju kao logaritmandi.

Ako se vrijednost x_1 promijeni za $p\%$, nova vrijednost varijable x bit će:

$$x_2 = x_1 + \frac{p}{100} \cdot x_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x_1. \qquad (5)$$

Pripadna očekivana vrijednost varijable y jednaka je:

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 &= b \cdot x_2^a = b \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x_1\right]^a \\ &= b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^a \cdot x_1^a \qquad (6) \\ &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^a \cdot \hat{y}_1, \end{aligned}$$

pa relativna promjena vrijednosti varijable y iznosi

$$\begin{aligned} s &= \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{\hat{y}_1} = \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a \cdot \hat{y}_1 - \hat{y}_1}{\hat{y}_1} \\ &= \frac{\hat{y}_1 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a - 1\right]}{\hat{y}_1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^a - 1. \end{aligned} \qquad (7)$$

Iskažemo li tu promjenu u postotcima, dobit ćemo:

$$s = \left\{100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a - 1\right]\right\}\%, \qquad (8)$$

što je i trebalo pokazati. ■

Napomena 1. Koristeći razvoj u binomni red

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a = 1 + \frac{p}{100} \cdot a + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot \frac{p^2}{10000} + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{6} \cdot \frac{p^3}{1000000} + \dots, \qquad (9)$$

pokazuje se da za relativno male vrijednosti broja p (npr. $p \in [-1, 1]$) vrijedi aproksimacija:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a \approx 1 + \frac{p}{100} \cdot a. \qquad (10)$$

Koristeći aproksimaciju (10) dobiva se sljedeća posljedica Propozicije 1.

Korolar 1. Ako se vrijednost varijable x promijeni za $p\%$, pri čemu je $p \in [-1, 1]$, očekivana prosječna relativna promjena vrijednosti varijable y iznosi približno $(p \cdot a)\%$. Posebno, za $p = \pm 1$ ta promjena iznosi $\pm a\%$.

Napomena 2. Riječ *prosječna* se u Propoziciji 1. i Korolaru 1. pojavljuje iz razloga analognim onima spomenutima u prvim dvama dijelovima ovoga članka.

Pri interpretaciji parametra a obično se uzima $p = 1$. Istaknimo da u ekonomskim analizama takav odabir vrijednosti p omogućava tzv. *mjerenje elastičnosti* zavisne varijable u odnosu na nezavisnu varijablu. Detalji o tome mogu se naći u [1] ili [4].

Pokažimo primjenu ovoga modela na primjeru.

Primjer 1. Marketinški odjel tvornice za proizvodnju kozmetičkih proizvoda *Zlatna ruža* iz Šuplje Lipe analizira zavisnost zarade od prodaje njihova novoga parfema *Mirišljavko* o iznosu mjesečnoga ulaganju u promidžbu dotičnoga parfema. Podatci za prethodnih deset mjeseci navedeni su u sljedećoj tablici.

ukupan mjesečni iznos ulaganja u promidžbu [000 kn]	ukupna mjesečna zarada [000 kn]
200	32
230	33
370	37
100	28
340	36
260	34
280	35
350	36
170	31
420	38

a) Promatranu zavisnost grafički prikažite odgovarajućim grafikonom. Uz grafikon navedite sve potrebne oznake.

b) Odredite jednadžbu modela jednostavne potencijske regresije koji najbolje opisuje promatranu zavisnost i objasnite značenje parametara dobivenoga regresijskog modela.

c) Procijenite reprezentativnost dobivenoga modela na temelju koeficijenta determinacije.

Na temelju rezultata b) podzadatka procijenite:

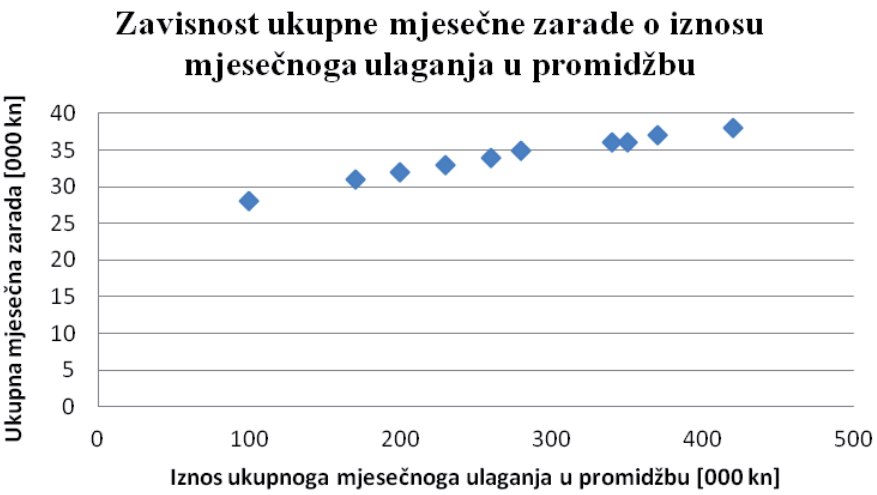
d) iznos i smjer relativne promjene ukupne mjesečne zarade ako se ukupan mjesečni iznos ulaganja u promidžbu poveća za 5%;

e) iznos i smjer relativne promjene ukupne mjesečne zarade ako se ukupan mjesečni iznos ulaganja u promidžbu smanji za 5%;

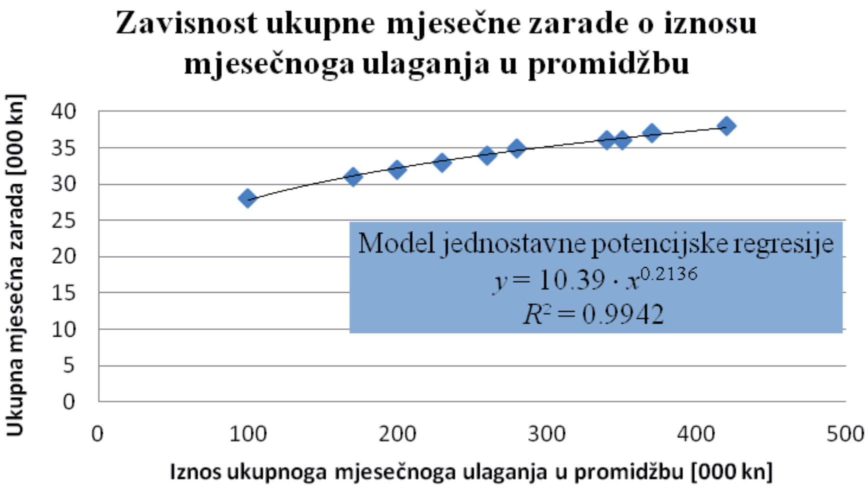
f) iznos i smjer relativne promjene ukupnoga mjesečnoga ulaganja u promidžbu tako da se ukupna mjesečna zarada poveća za 2%;

g) ukupnu mjesečnu zaradu ako se u mjesečnu promidžbu uloži 250 000 kn;

h) ukupan mjesečni iznos ulaganja u promidžbu u mjesecu u kojem je prodajom parfema ostvarena dobit od 30 000 kn.



Slika 1. Dijagram rasipanja za Primjer 1.



Slika 2. Model jednostavne potencijske regresije za Primjer 1. i pripadna regresijska krivulja

Riješimo postavljene zadatke.

a) Zavisnost ukupne mjesečne zarade o ukupnom mjesečnom iznosu ulaganja u promidžbu grafički prikazujemo dijagramom rasipanja prikazanim na slici 1. Opis postupka izradbe toga dijagrama izostavljamo, a može se naći u [3].

b) Jednadžba modela jednostavne potencijske regresije, zajedno s pripadnom krivuljom, navedena je na sljedećoj slici. Opis postupka dobivanja te jednadžbe u MS Excelu izostavljamo, a može se naći u [3].

Interpretirajmo vrijednosti parametara a i b pazeći na mjerne jedinice varijabli x i y.

Vrijednost $b = 10.39$ znači da u mjesecu u kojemu se u promidžbu uloži ukupno 1000 kn tvrtka može očekivati ukupnu mjesečnu zaradu od 10.39 tisuća kuna = 10 390 kn.

Parametar a interpretiramo koristeći Korolar 1. Odaberimo $p = 1$. Tada $a = 0.2136$ znači da ako se iznos ukupnoga mjesečnoga ulaganja u promidžbu poveća za 1%, onda će se ukupna mjesečna zarada povećati za prosječno 0.2136%.

c) Koeficijent determinacije dobivenoga regresijskoga modela je $R^2 = 0.9942$. To znači da se približno 99.42% zavisnosti ukupne mjesečne zarade o ukupnom mjesečnom ulaganju u promidžbu može objasniti modelom jednostavne potencijske regresije, pa je dobiveni regresijski model vrlo reprezentativan.

d) U jednakost (3) uvrstimo $p = 5$ i $a = 0.2136$, pa dobijemo:

$$s = \left\{100 \cdot \left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{0.2136} - 1\right]\right\} \approx 1.05\%. \tag{11}$$

Dakle, ako se ukupno mjesečno ulaganje u promidžbu poveća za 5%, onda će se ukupna mjesečna zarada očekivano povećati za prosječno 1.05%.

e) Na prvi bismo pogled i na temelju rezultata d) podzadatka očekivali da će se ukupna mjesečna zarada očekivano smanjiti za prosječno 1.05%. Međutim, takva procjena nije baš točna. U jednakost (3) uvrstimo $p = -5$ i $a = 0.2136$, pa dobijemo:

$$s = \left\{100 \cdot \left[\left(1 - \frac{5}{100}\right)^{0.2136} - 1\right]\right\} \approx -1.09\%. \tag{12}$$

Dakle, ako se ukupno mjesečno ulaganje u promidžbu smanji za 5%, onda će se ukupna mjesečna zarada očekivano smanjiti za prosječno 1.09%. Za relativno velike vrijednosti varijable x (npr. $x = 10^9$) razlika od 0.04% nije zanemariva, pa uvijek treba koristiti točniju procjenu.

f) Iz jednakosti (3) izrazimo varijablu p:

$$\begin{aligned}
s &= 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a - 1\right] \\
\frac{s}{100} &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^a - 1 \\
\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a &= 1 + \frac{s}{100} \qquad /^{\frac{1}{a}} \\
\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^a\right]^{\frac{1}{a}} &= \left(1 + \frac{s}{100}\right)^{\frac{1}{a}} \\
1 + \frac{p}{100} &= \left(1 + \frac{s}{100}\right)^{\frac{1}{a}} \\
\frac{p}{100} &= \left(1 + \frac{s}{100}\right)^{\frac{1}{a}} - 1 \\
p &= \left\{\left[\left(\frac{s}{100} + 1\right)^{\frac{1}{a}} - 1\right] \cdot 100\right\}\%.
\end{aligned} \tag{13}$$

Uvrstimo li $s = 2$ i $a = 0.2136$, dobit ćemo:

$$p = \left[\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{\frac{1}{0.2136}} - 1\right] \cdot 100 \approx 9.71\%. \tag{14}$$

Dakle, da se ukupna mjesečna zarada poveća za 2%, iznos ukupnoga mjesečnoga ulaganja u promidžbu očekivano treba povećati za prosječno 9.71%.

g) Ukupnu mjesečnu zaradu, ako se u mjesečnu promidžbu uloži 250 000 kn, procijenit ćemo tako da u dobivenu jednadžbu modela jednostavne potencijske regresije

$$\hat{y} = 10.39 \cdot x^{0.2136} \tag{15}$$

uvrstimo $x = 250$ (uz oprez s mjernim jedinicama i izračun s točnošću na pet decimalnih mjesta):

$$\hat{y} = 10.39 \cdot 250^{0.2136} \approx 33.79213. \qquad (16)$$

Dakle, traženi iznos je 33.79213 tisuća kuna = 33 792.13 kn.

h) Traženi iznos izračunat ćemo tako da iz regresijske jednadžbe (15) izrazimo varijablu x. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y &= 10.39 \cdot x^{0.2136} \\ x^{0.2136} &= \frac{y}{10.39} \;/^{\frac{1}{0.2136}} \\ \hat{x} &= \left(\frac{y}{10.39}\right)^{\frac{1}{0.2136}} \qquad (17) \end{aligned}$$

U jednakosti (17) smo namjerno pisali $\hat{x}$ da bismo naglasili da je riječ o procijenjenoj vrijednosti varijable x. U jednakost (17) uvrstimo $y = 30$ (opet uz oprez s mjernim jedinicama i izračun vrijednosti varijable x s točnošću na pet decimalnih mjesta):

$$\hat{x} = \left(\frac{30}{10.39}\right)^{\frac{1}{0.2136}} \approx 143.19426. \qquad (18)$$

Dakle, traženi iznos je 143.19426 tisuća kuna = 143 194.26 kn.

Napomena 3. Podzadatak **h)** moguće je riješiti i tako da se riješi jednadžba

$$30 = 10.39 \cdot x^{0.2136}. \qquad (19)$$

Logaritmiramo li tu jednadžbu (po bazi 10 ili po bazi e), dobivamo:

$$\begin{aligned} \log 30 &= \log(10.39 \cdot x^{0.2136}) \\ \log 30 &= \log 10.39 + \log(x^{0.2136}) \\ \log 30 &= \log 10.39 + 0.2136 \cdot \log x \\ \log x &= \frac{\log 30 - \log 10.39}{0.2136} \\ x &= 10^{\frac{\log 30 - \log 10.39}{0.2136}} \approx 143.19426. \qquad (20) \end{aligned}$$

Primijetimo da se u relacijama (18) i (20) prigodom izračuna pojavljuju približne vrijednosti. U relaciji (18) imamo izračun točno triju približnih vrijednosti, a u relaciji (20) izračun točno četiriju približnih vrijednosti, pa je u rješavanju zadatka bolje primijeniti relaciju (18).

Zaključno treba spomenuti da se ovdje opisani nelinearni regresijski modeli ne obrađuju na redovnoj nastavi matematike, odnosno statistike u srednjim ekonomskim školama. Namjera je uvesti ih u dodatnu nastavu matematike u četvrtom razredu srednje škole s ciljem pripreme učenika za polaganje državne mature, osposobljavanja učenika za uočavanje matematičkih struktura koje se primjenjuju u ekonomiji i gospodarstvu, te općenito osposobljavanja učenika za daljnji nastavak njihova školovanja. Nadamo se da će ova namjera što prije biti u potpunosti ostvarena.

LITERATURA

1/ I. Šošić, V. Serdar: *Uvod u statistiku*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

2/ I. Šošić: *Primijenjena statistika*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

3/ M. Papić: *Primijenjena statistika u MS Excelu*, Naklada ZORO, Zagreb, 2012.

4/ M. Vukičević, M. Papić: *Matematičko–statistički priručnik za poduzetnike*, Golden-marketing, Zagreb, 2003.