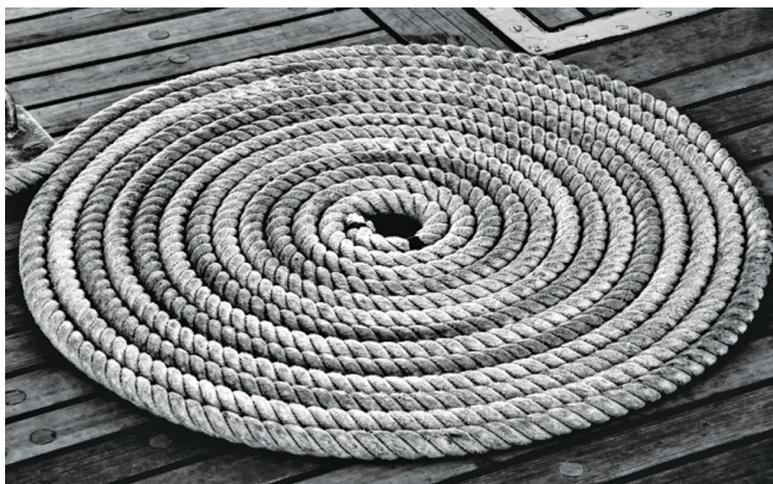


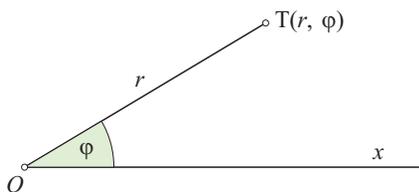
U svijetu zavoja



Branimir Dakić, Zagreb

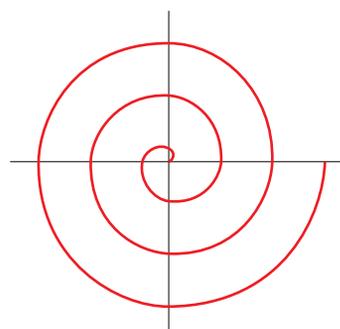
Jednu osobito zanimljivu skupinu ravninskih krivulja čine spirale. Mnoštvo je raznoraznih spirala ali se među njima ipak izdvajaju dvije, **Arhimedova** i **logaritamska** pa evo male priče o njima.

Uobičajeno ih je zbog jednostavnijeg zapisa promatrati u polarnom koordinatnom sustavu. Osnove ovog sustava čine polupravac x (*polarna os*) s rubnom točkom O (*pol*).



Svaka točka T ravnine jednoznačno je zadana dvama realnim brojevima. Jedan (r) je udaljenost te točke od pola O , a drugi (ϕ) je orijentirani kut što ga pravac OT zatvara s polarnom osi.

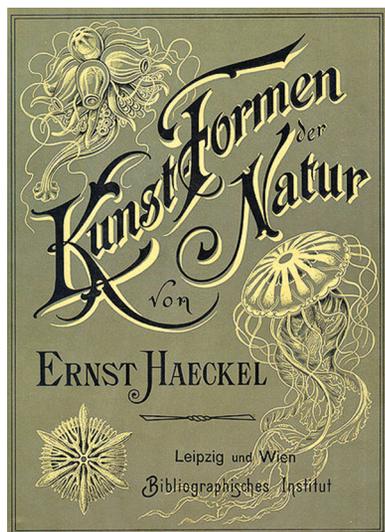
Arhimedova spirala je ravninska transcendentna krivulja, trajektorija¹ točke koja se giba jednolikom brzinom v po zruci od njezine rubne točke O i pritom zraka jednolikom brzinom w kruži oko iste te



točke. Zbog te linearnosti gibanja ova se spirala naziva još i linearnom. Arhimedovom se zove u čast ovom velikom mudracu koji ju je izučavao uz rješavanje čuvenih antičkih problema trisekcije kuta i kvadrature kruga (3. st. prije Krista).

Jednadžba Arhimedove spirale u polarnim koordinatama jest $r = a\phi$, gdje je $a = \frac{v}{w}$. Krivulja ima dvije grane, ovisno o smjeru vrtnje, odnosno orijentaciji kuta ϕ . Razmak svaka dva uzastopna zavoja je stalan.

¹ Trajektorija (lat. *trajicere*) – prebaciti, prenijeti, u matematici i fizičkom smislu putanja ili trag gibanja materijalne točke



Zbog svoje česte pojave u prirodi, najpoznatija je i najzanimljivija jedna druga spirala, **logaritamska**. Zateći ćemo je u sasvim neobičnim pojavnim oblicima kao što su uraganski oblaci, sazviježda, razne forme u biljnom svijetu, pužici i školjke itd. Ljepotu oblika u prirodi uočili su i izučavali mnogi znanstvenici. Tako je primjerice osobito zanimljivo istraživanje njemačkog biologa Ernsta Haeckela (kraj 19. i početak 20. stoljeća) u čijoj nadaleko poznatoj knjizi **Kunstformen der Natur** (Umjetnički oblici prirode) su između ostalih prikazani i spiralni oblici u biljnom i životinjskom svijetu.

Tijekom povijesti logaritamska je spirala "zavela" mnoge velike matematičare pa je tako počašćena nazivom *Spira mirabilis* (čudesna spirala). Čini se kako ju je prvi detaljnije izučavao René Descartes, a njome se nezavisno od Descartesa bavio i talijanski znanstvenik Torricelli. Jacob Bernoulli bio je toliko oduševljen logaritamskom spiralom da je zatražio da se ugravira u njegov nadgrobni spomenik s tekстом **Eadem mutata resurgo**. Već prostim okom može se uočiti pogreška, spirala na spomeniku očito nije logaritamska već je Arhimedova.

U našem Panoptikumu vidimo niz sličica koje nas uvjeravaju u ljepotu oblika logaritamske spirale. Najčešće se pritom za ilustraciju pokazuje presjek školjke *Indijske lađice* ili nautilusa. Ona pripada rodu mekušaca, razredu glavonošaca i za nju se

često kaže da je živi fosil koji se nije bitno promijenio unatrag 500 milijuna godina.

Lađica se hrani račićima i sitnom ribom a hranu uzima jednom mjesečno. Veličine je oko 20 cm. Danas živi jedino na prostorima Indijskog oceana.



No vratimo se matematičkom pogledu na samu krivulju. Logaritamska spirala je ravninska transcendentna krivulja čija jednačba u polarnom koordinatnom sustavu (r, φ) ima jednačbu

$$r = ae^{b\varphi},$$

gdje su a i b pozitivni realni brojevi.

uz panoptikum

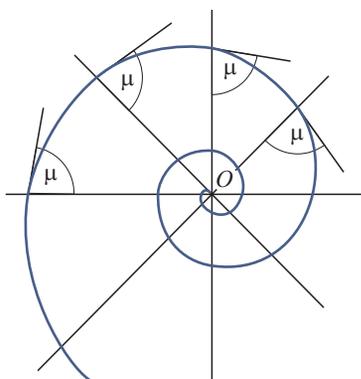
Parametarske jednadžbe krivulje su

$$x(t) = r(t) \cos t = ae^{bt} \cos t$$

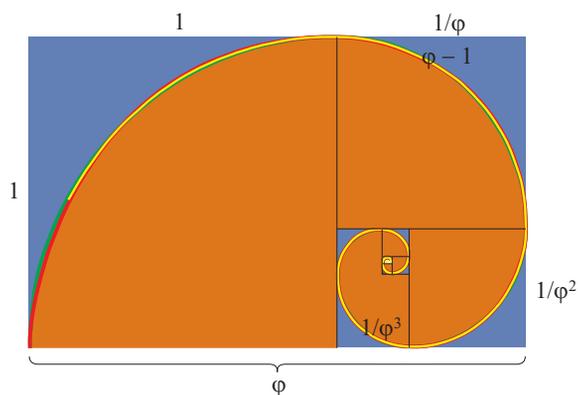
$$y(t) = r(t) \sin t = ae^{bt} \sin t.$$

Za razliku od Arhimedove spirale kod koje je razmak između zavoja stalan, taj razmak kod logaritamske skale raste geometrijskom progresijom.

Još jedno njezino važno svojstvo jest da ona sve radijvektore siječe pod istim kutom μ .



I na kraju dodajmo: na osnovama svojstava Fibonaccijeva niza moguće je provesti približnu konstrukciju logaritamske spirale. Kako? Vidimo to na poštanskoj marci iz SAD-a. Odrežemo li od zlatnog pravokutnika kvadrat, ostatak je također zlatni pravokutnik. Ovakvim uzastopnim rezanjem dobijemo niz kvadrata u koje upisujemo kružne lukove koji se nadovezuju jedan na drugi i tako čine spiralu. Koliko je aproksimacija uspješna procijenite promatrajući sljedeći sliku:



Na stranicama Panoptikuma vidimo niz sličica ovim redom:

1. Logaritamska spirala u presjeku kućice Indijske lađice.
2. Još jedan primjer izvađen iz mora.
3. Ovaj fosil potječe iz Dubrave, naselja ispod zapadne Medvednice.
4. Područje niskog tlaka nad Islandom.
5. Jedan od najvećih uragana u povijesti koji je poharao dio istočne obale SAD-a 2005. godine bila je Katrina. Osobito je stradala Louisiana s New Orleansom.
6. Galaksija Whirlpool, tipična spiralna galaksija iz sazvežđa Lovački psi.
7. Sjemenke suncokreta posložene su u nizu logaritamskih spirala.
8. Kaktus.
9. Gušterov rep.
10. Vinogradski puž.
11. Kameleon.
12. Jedan odsječak Mandelbrotova skupa razvija se u logaritamsku spiralu.