Srce srcu ...

Branimir Dakić, Zagreb

Izradite s GeoGebrom čestitku za Valentinovo

Valentinovo, Dan sv. Valentina ili Dan zaljubljenih blagdan je koji se gotovo u cijelom svijetu obilježava 14. veljače[1]. Korijene Valentinova neki povjesničari nalaze u Luperkalijama, drevnim rimskim svetkovinama koje su završavale 14. veljače spajajući se s blagdanom Junone, zaštitnice braka i kućnog ognjišta. Druga pak teorija govori da je svećenik Valentin kršio naredbu rimskog cara Kladija I. o zabrani ženidbe mladih vojnika te je potajice provodio obrede vjenčanja. Zbog neposluha na dan 14. veljače Valentinu odrube glavu, a nedugo potom proglasiše ga svecem. Postoji i mišljenje kako se Valentinovo razvilo iz poganskih običaja. Prema nekima običaj obilježavanja 14. veljače kao dana zaljubljenih potječe iz Engleske te se odatle širio po Europi. Pisale su se čestitke ukrašene prešanim visibabama, djevojke su dijelile jabuke. U Hrvatskoj prvi zabilježeni običaji obilježavanja Valentinova sežu u konac 19. st. u doba kada je mladež u Hrvatskom Zagorju u žbunju oko kuća tragala za skrivenim "ptičekima", zapravo malim, lijepo oblikovanim hljepčićima, svojevrsnim signalima simpatije i ljubavi.

Spomenimo još i to kako se u Hrvatskom Zagorju jugoistočno od grada Pregrade nalazi selo Valentinovo. U njemu je dvorac Bežanec, jedan od očuvanijih dvoraca ovoga kraja.

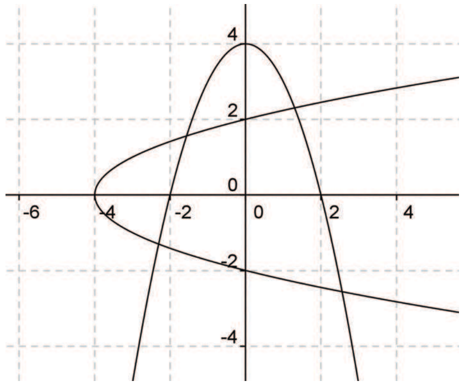
U MiŠ-u smo u više navrata objavili priloge uz Valentinovo[2]. Naime, ovaj je blagdan vrlo omiljen među mladima pa nas već sama ta činjenica potiče da to pokušamo iskoristiti i u nastavi matematike. Zgodno bi bilo organizirati natjecanje u izradi postera ili prirediti sat izrade čestitki. A tko zna na kakve sve ideje mogu doći naši vrijedni nastavnici. U svakom slučaju valja zahtijevati da se u te kao uostalom i druge slične aktivnosti ugradi "prava" matematika a spomenuti prilozi u MiŠ-u zasigurno mogu biti inspirativni.

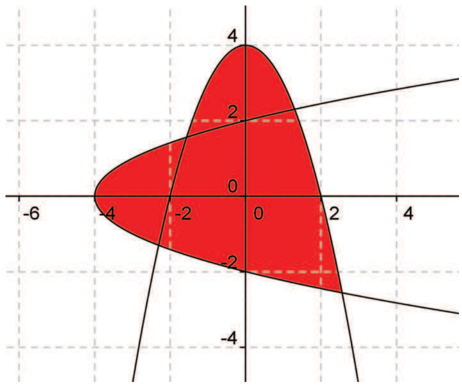
U ovom članku navodimo niz primjera u kojima se tradicionalni simbol ljubavi – srce, može dobiti kao lik omeđen izvjesnim ravninskim krivuljama. Uglavnom je riječ o krivuljama drugoga reda, posebice elipsi i paraboli, pa se ovo može provesti sa starijim srednjoškolcima. Za crtanje slika dovoljno je minimalno snalaženje u GeoGebri o kojoj se često pisalo u MiŠ-u i koju možete slobodno preuzeti na `www.geogebra.org`.

[1] Ako je 14. 3. Dan broja π, onda je Valentinovo dan broja $\pi - 1$, zar ne?
[2] Vidjeti primjerice MiŠ 13, MiŠ 23, MiŠ 38.

Pa krenimo!

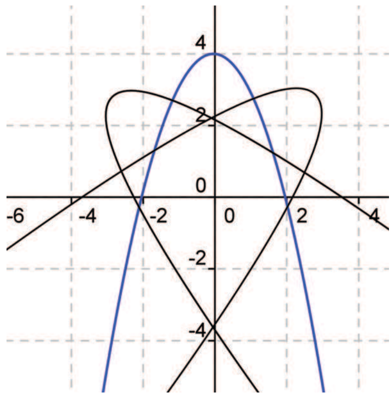
Nacrtamo dvije sukladne parabole, jednadžba prve je $y=-x^2+4$, jednadžba druge $y^2=x+4$. Te su dvije parabole međusobno osno simetrične s obzirom na pravac $y=-x$. Pri tom preslikavanju ravnine neka točka (x,y) preslika se u točku $(-y,-x)$. Odmah uočavamo željeni lik omeđen lukovima dviju krivulja. Možemo ga obojati, a možemo ga i "očistiti" od suvišnih crta i potom zarotirati za $45°$. Dalje možete nastaviti po svojem ukusu.

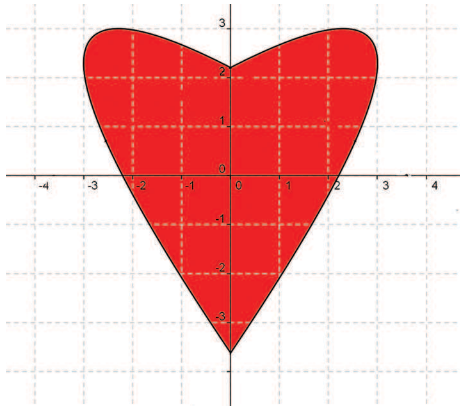




Isti se učinak može postići jednostavnim "zahvatima" s parabolom $y=-x^2+4$. Nacrtamo tu parabolu te je rotiramo oko ishodišta za $45°$ i za $-45°$. Dobijemo sliku na kojoj se razabiru dvije parabole dobivene opisanom rotacijom.

I konačno, uočavamo dio ravnine u obliku srca koji je omeđen ovim dvjema parabolama.





U algebarskom prozoru uočavamo jednadžbe pridružene rotiranim parabolama:

$$0.5x^2+xy+0.5y^2-0.71x+0.71y=4 \quad \text{i}$$
$$0.5x^2-xy+0.5y^2+0.71x+0.71y=4.$$

Tu činjenicu možemo i zanemariti ali se može očekivati da će neki učenici sigurno postaviti pitanja oko ovih jednadžbi. Tim se učenicima može ponuditi zadatak da sami istraže o čemu je riječ i o tome izvjeste na nekom od narednih sati. S druge strane problem i nije osobito složen pa ovisno o procjeni nastavnika može se obraditi kao nastavna jedinica u kojoj će se naglasiti povezanost analitičke geometrije ravnine i prethodno prorađenog gradiva o trigonometrijskim funkcijama[3].

Rotiramo li ravninu oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smislu, tada se svaka točka $T(x,y)$ preslika u

[3] Vidjeti primjerice: S. Kurepa, *Matematika 3*, udžbenik za 3. razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb 1990. ili B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb 1995.

točku $T'(x', y')$ pri čemu je

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

U našem konkretnom primjeru pri rotaciji ravnine za $45°$ svaka točka (x, y) preslika se u točku (x', y') te je

$$x' = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \quad \text{i}$$
$$y' = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y).$$

Tako se parabola $y = -x^2 + 4$ preslika u parabolu $y' = -(x')^2 + 4$, čija jednadžba u koordinatnom sustavu $(x0y)$ glasi:

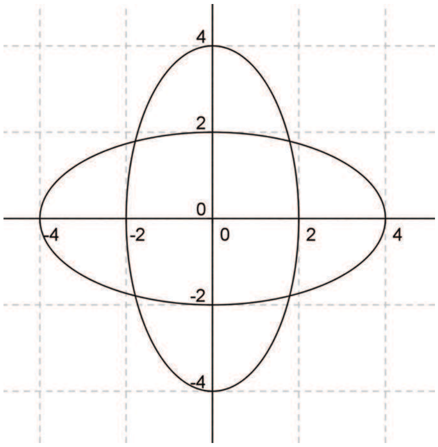
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)\right)^2 + 4.$$

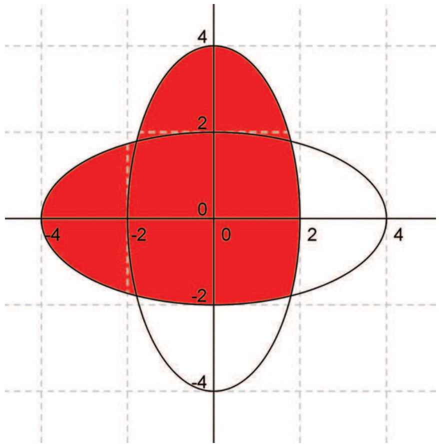
Odatle se (uz $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$) dobije

$$0.5x^2 + 0.5y^2 - xy + 0.71x + 0.71y = 4.$$

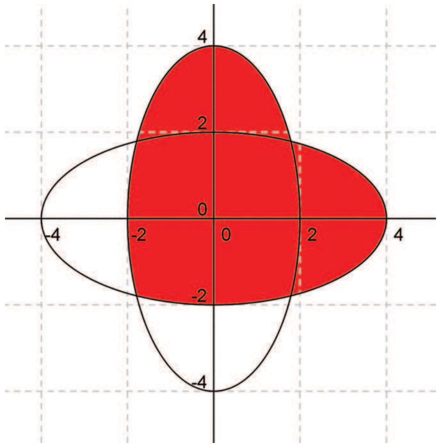
Na jednak se način dolazi do jednadžbe parabole pri drugoj rotaciji.

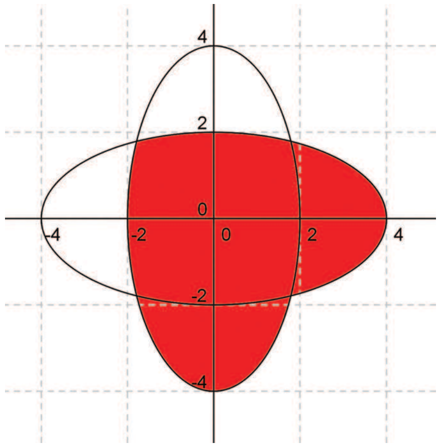
Nacrtajmo sada dvije elipse: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ i $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Dobro je od učenika zahtijevati da malo komentiraju te jednadžbe. Na slici odmah uočavamo željeni lik te ga bojanjem izdvojimo.

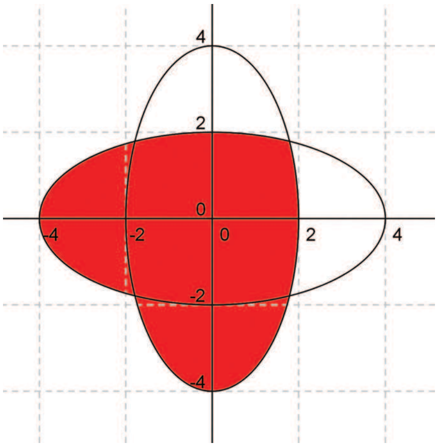




Primijetite kako smo mogli istaknuti i neki od triju likova sukladnih prvome.

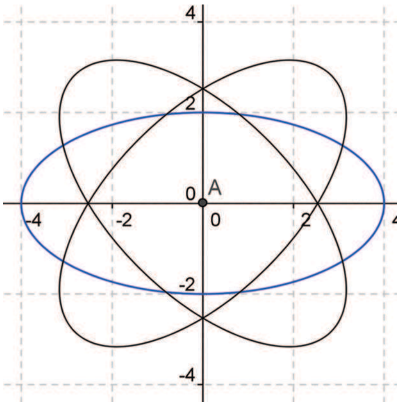


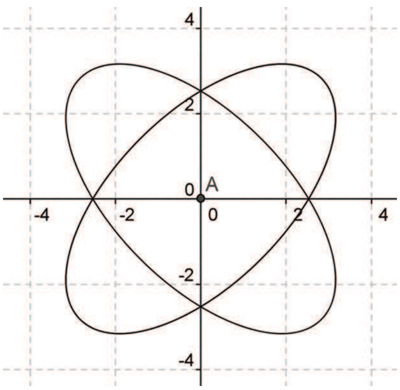


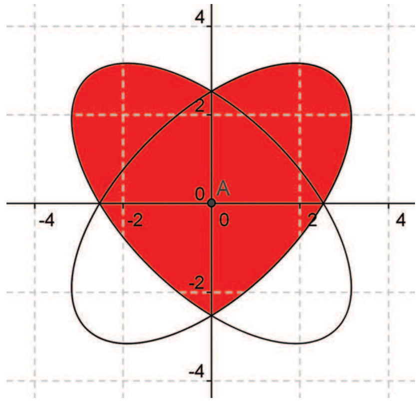


Svaki se iz svakog može dobiti određenim rotacijama ravnine. Možete li ih opisati?

I u ovom primjeru zgodno je krenuti od jedne elipse pa je rotirati oko ishodišta udesno i ulijevo za $45°$. Jednadžbe dobivenih slika i opet vidimo u algebarskom prozoru.

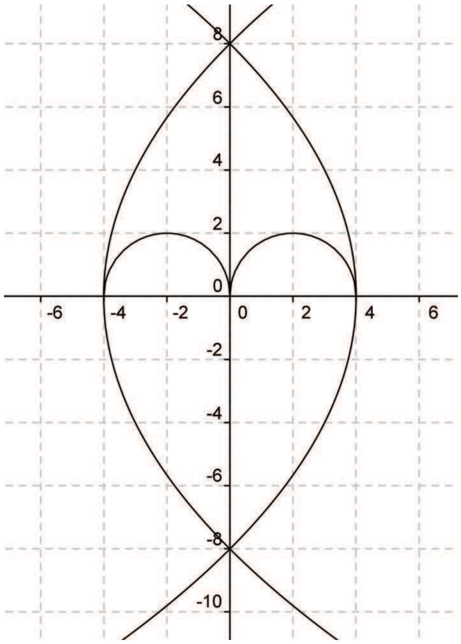


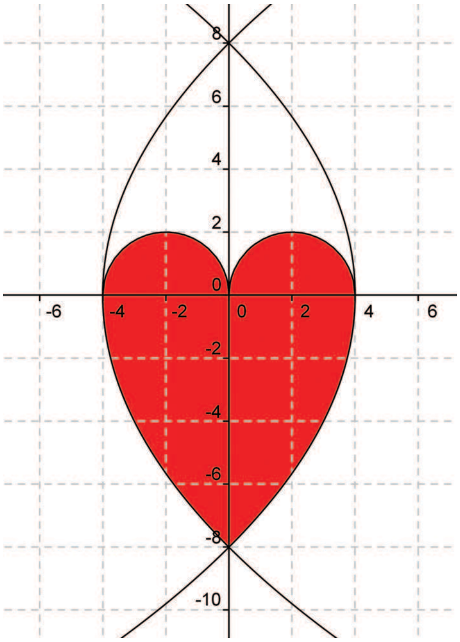


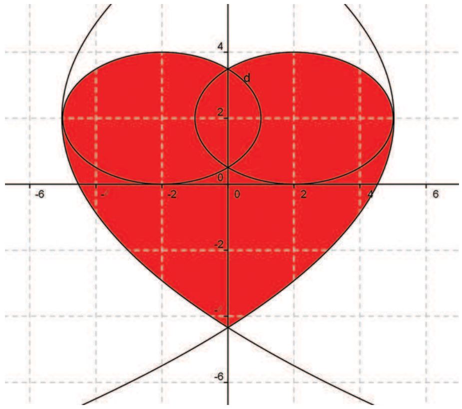


Svakako je za preporučiti nastavnicima nadarenijih učenika ili učenika u prirodoslovno-matematičkim gimnazijama da se malo pozabave rotacijama ravnine i njihovim zapisima u analitičkoj formi.

Idemo još malo dalje. Nacrtamo sada dvije polukružnice $y = \sqrt{4-(x \pm 2)^2}$ i dvije parabole $y^2 = 16(4 \pm x)$ pa odmah uočavamo "srčeko" omeđeno tim krivuljama.

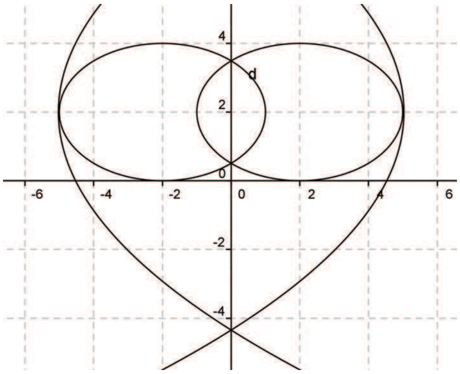






Elipse su $\dfrac{(x \pm 2)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$, a parabole $(y-2)^2 = 8(5 \pm x)$.

Sličnu sliku možemo dobiti iz kombinacije dviju elipsa i dviju parabola:



U 3. broju MiŠ-a prije 13 godina čitateljima smo čestitali Valentinovo ovom jednadžbom:

$$(y - |x|)^2 = 3 - x^2.$$

Kad pogledamo njezin graf uočavamo da je vjerojatno i on nastao nekim zahvatima na krivuljama drugog reda. Pa za kraj ovog članka čitateljima ostavljamo u zadatak njegovu analizu.