n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\dots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$								

Tablica 1.

Pomnožimo li sada svaki stupac u Pascalovu trokutu s $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \dots$ dobivamo:

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\dots$
0	$1{\cdot}2^0$					
1	$1{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$				
2	$1{\cdot}2^2$	$2{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$			
3	$1{\cdot}2^3$	$3{\cdot}2^2$	$3{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$		
4	$1{\cdot}2^4$	$4{\cdot}2^3$	$6{\cdot}2^2$	$4{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$	
5	$1{\cdot}2^5$	$5{\cdot}2^4$	$10{\cdot}2^3$	$10{\cdot}2^2$	$5{\cdot}2^1$	
6	$1{\cdot}2^6$	$6{\cdot}2^5$	$15{\cdot}2^4$	$20{\cdot}2^3$	$15{\cdot}2^2$	
7	$1{\cdot}2^7$	$7{\cdot}2^6$	$21{\cdot}2^5$	$35{\cdot}2^4$	$35{\cdot}2^3$	
$\vdots$	$\vdots$					

Tablica 2.

ili

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\dots$
0	1					
1	2	1				
2	4	4	1			
3	8	12	6	1		
4	16	32	24	8	1	
5	32	80	80	40	10	
6	64	192	320	160	60	
7	128	448	1120	560	280	
$\vdots$	$\vdots$					

Tablica 3.

Iz tablice 2 dobivamo Pellove brojeve, npr.

$$
\begin{aligned}
P_3 &= 4+1=5,\\
P_4 &= 8+4=12,\\
P_5 &= 16+12+1=29,\\
P_6 &= 32+32+6=70,\\
P_7 &= 64+80+24+1=169,\ \dots
\end{aligned}
$$

ili

$$P_3 = 2^2\cdot\binom{2}{0} + 2^0\cdot\binom{1}{1} = 4\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5,$$

$$P_7 = 2^6\cdot\binom{6}{0} + 2^4\cdot\binom{5}{1} + 2^2\cdot\binom{4}{2} + 2^0\binom{3}{3}.$$

LITERATURA

1/ J. Carstensen, A. Muminagić: *Pell-tal og Pell-Lucas tal*, Matematik Magasinet, 65, august 2012.

2/ B. Dakić: *Padovanov niz i plastična konstanta*, Miš br. 57, godina 12./2010., str. 83–85.

3/ T. Koshy: *Pell Numbers: A Fibonacci-like Treasure for Creative Exploration*, Matematics Teacher, March 2011.

4/ D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

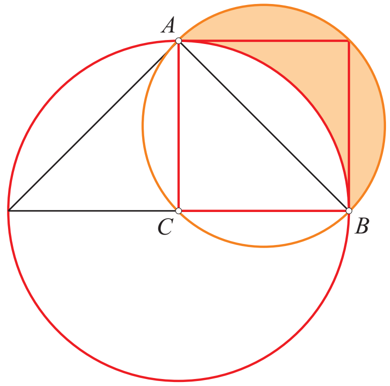
5/ D. Žubrinić: *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 1997.

Kvadratura mnogokuta

Branimir Dakić, Zagreb

“Kvadratura kruga” jedna je od popularnijih matematičkih sintagmi, a u svakodnevnom životu rabi se kao sinonim za nerješivu zadaću. Radi se o matematičkom zadatku koji zahtijeva konstrukciju kvadrata po površini jednakog zadanom krugu. Pritom se pod “konstruirati” misli na klasičnu geometrijsku konstrukciju pri kojoj je isključivo dopuštena uporaba šestara i ravnala, odnosno jedine dvije crte koje se mogu izvesti su kružnica i pravac. Zadaća “kvadrature kruga” nije rješiva što je dokazano 1882. godine. Sam je dokaz nepogodan za prikaz u školskoj matematici jer se izvodi uporabom znanja iz “više matematike”. Naime, čitava se konstrukcija svodi na zahtjev da se uz zadanu jediničnu dužinu konstruira dužina duljine π. Kako je π transcedentan broj to je neizvedivo pa je i to, uz postavljena ograničenja, nerješiv problem.

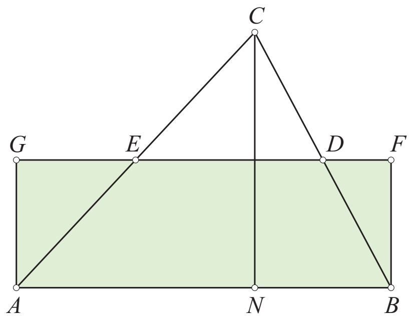
Zanimljivo je da su određena rješenja u prošlosti ohrabrivala matematičare u uvjerenju da je moguće *kvadrirati krug*. Kao jedan osobit primjer jest kvadratura lunule[1] na temelju koje bi se moglo pretpostaviti kako se nešto omeđeno kružnim lukovima može pretvoriti u nešto omeđeno dužinama a jednake površine.



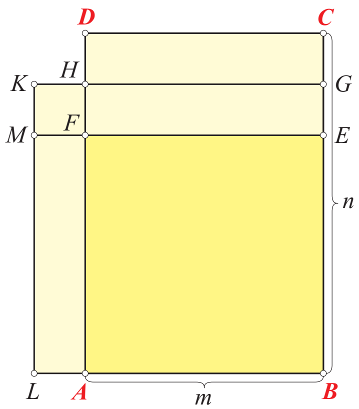
[1] v. MiŠ 61 – *Hipokratove lunule*

Kako kvadrirati trokut, pravokutnik ili neki mnogokut? To je ono što želimo prikazati u ovom malom članku. Pretvoriti trokut u pravokutnik jednake površine, lak je zadatak. Problem se dakle može svesti na zadatak koji zahtijeva konstrukciju kvadrata čija je površina jednaka površini zadanog pravokutnika.

Na sljedećoj slici vidimo jednu moguću konstrukciju gdje je trokut ABC pretvoren u pravokutnik jednake površine. Rješenje se oslanja na poučke o sukladnosti trokuta i prepuštamo ga čitateljima.

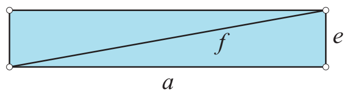


Sada još dakle valja pravokutnik pretvoriti u kvadrat jednake površine. I tu imamo razna rješenja. Evo jednog od najstarijih.



Neka je dan pravokutnik $ABCD$. Duljine njegovih stranica su $|AB| = m$, $|BC| = n$. Odredimo kvadrat $ABEF$ sa stranicom duljine m. Točke G i H su polovišta dužina $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$ te je $|MF| = |FH| = \dfrac{n-m}{2} = e$. Označimo sa $f = |ME| = \dfrac{m+n}{2}$.

Sada nacrtamo pravokutnik čija je jedna stranica jednaka e, a dijagonala je jednaka f.

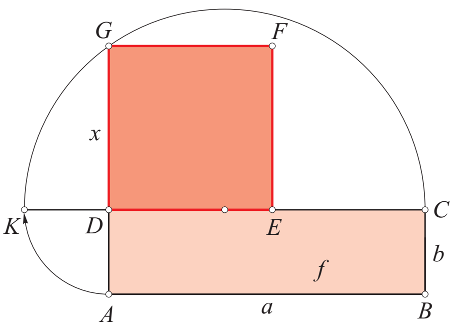


Druga stranica ovog pravokutnika duljina je kvadrata koji smo trebali konstruirati. Provjerimo:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= f^2 - e^2 \\
&= \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 \\
&= mn.
\end{aligned}
$$

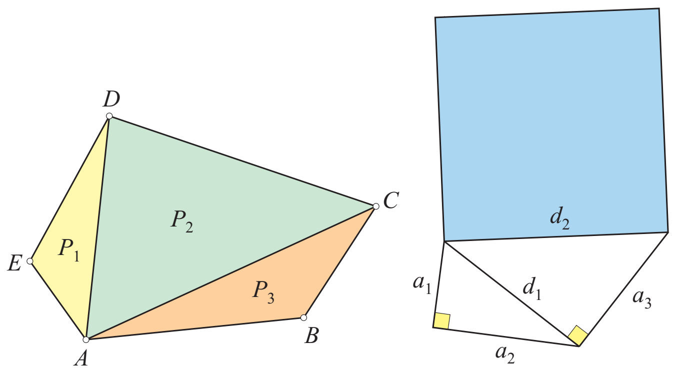
Sljedeća konstrukcija, kojom dani pravokutnik pretvaramo u kvadrat jednake površine, utemeljena je na *Euklidovu poučku*.

Dan je pravokutnik $ABCD$ sa stranicama duljina a i b. Odredimo na pravcu CD točku K tako da je $|DK| = b$. Nad dužinom $\overline{KC}$ konstruiramo polukružnicu te položimo okomicu DG u točki D. Time je određena dužina $\overline{DG}$ čija je duljina (Euklidov poučak) jednaka $x = \sqrt{ab}$. Zaključujemo da je x stranica traženog kvadrata $DEFG$.



Evo kako ćemo konstruirati kvadrat po površini jednak danom peterokutu. Peterokut izrežemo na tri trokuta povlačeći dijagonale iz jednog vrha, uzmimo vrha A. Neka ti trokuti imaju površine P_1, P_2 i P_3.

Zatim već opisanom konstrukcijom pretvorimo te trokute u kvadrate jednakih površina. Neka su a_1, a_2 i a_3 duljine stranica tih kvadrata. Sada konstruiramo pravokutni trokut s katetama duljina a_1 i a_2, hipotenuza će mu biti duljine d_1. Konačno konstruiramo još jedan pravokutni trokut s katetama duljina a_3 i d_1. Duljinu hipotenuze toga trokuta označimo sa d_2.



I konačno imamo:

$$
\begin{aligned}
P &= d_2^2 = d_1^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\
&= P_1 + P_2 + P_3.
\end{aligned}
$$

Opisani postupak kvadrature peterokuta možemo na analogan način provesti i za bilo koji drugi mnogokut.

Moglo bi se nastaviti s dopunjavanjem i razvijanjem ove teme. Vrlo se često dešava da se neki matematički zadatak može proširiti i obraditi kao manja cjelina. Takvi su uraci osobito pogodni za samostalan rad nadarenijih učenika. Osobito je dobro kad se pri tome povežu razni sadržaji matematike pa i drugih područja. Ovdje bi valjalo podsjetiti kako danas toliko istaknuta projektna nastava u pravilu inzistira na povezivanju različitih područja, na primjenama u praksi itd. No to ne znači da u nastavi matematike projekt ne može biti povezivanje matematičkih gradiva pa makar se radilo i o teorijskoj obradi.

Državni stručni skup učitelja i nastavnika matematike, Vodice 2013.

Fotografije: Damir Šišić

Četvrto ekipno natjecanje osnovnih škola

Fotografije: organizatori