Pellovi[1] brojevi

Jens Carstensen, Danska
Alija Muminagić, Danska

Studenti matematičkih i računarskih znanosti na kolegijima *Kombinatorika* i *Diskretna matematika* (a također i studenti prirodnih i tehničkih znanosti) susreću se s Bellovim, Bernoullijevim, Catalanovim, Eulerovim, Fibonaccijevim, Lucasovim i Stirlingovim brojevima[2] (vidi [4] i [5]).

O Padovanovim brojevima vidi [2], a u ovom članku pisat ćemo o Pellovim brojevima.

Definicija. Brojevi definirani s

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, \\ P_2 &= 2, \\ P_n &= 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{aligned} \tag{1}$$

nazivaju se **Pellovi brojevi**.

Lako dobivamo:

n	3	4	5	6	7	8	...
P_n	5	12	29	70	169	408	...

Niz brojeva P_n zove se Pellov niz, a P_n n-ti Pellov broj. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem. n-ti Pellov broj je jednak

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]. \tag{2}$$

Dokaz 1. Iz $P_n = 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2}$ (pomicanjem indeksa) dobivamo

$$P_{n+2} = 2 \cdot P_{n+1} + P_n$$

tj.

$$P_{n+2} - 2 \cdot P_{n+1} - P_n = 0. \tag{3}$$

Stavimo li $P_k = x^k$ u rekurziju (3) dobivamo karakterističnu jednadžbu $x^2 - 2x - 1 = 0$, čiji su korijeni $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Zato je opće rješenje dano s

$$P_n = C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n. \tag{4}$$

Koristeći se s (4) i početnim uvjetima, imamo:

$n = 1:$

$$1 = P_1 = C_1(1+\sqrt{2})^1 + C_2(1-\sqrt{2})^1$$

$n = 2:$

$$2 = P_2 = C_1(1+\sqrt{2})^2 + C_2(1-\sqrt{2})^2$$

[1] John Pell (1611.–1685.), engleski matematičar.
[2] Eric Temple Bell (1883.–1960.), američki matematičar, Jacob Bernoulli (1654.–1705.), švicarski matematičar, Eugene Charles Catalan (1814.–1894.), francuski matematičar, Leonhard Euler (1707.–1783.), švicarski matematičar, Leonardo Pisano Fibonacci (1170.–1250.) talijanski matematičar, James Stirling (1692.–1770.), škotski matematičar i Richard Padovan (1935.–), talijanski matematičar.

Jedinstveno rješenje ovog sustava jednadžbi je

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

pa je

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]. \quad \blacksquare$$

Dokaz 2. Karakteristična jednadžba rekurzije (3) je $x^2 - 2x - 1 = 0$. Neka su korijeni te jednadžbe $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ i $\beta = 1 - \sqrt{2}$, tada je (Vièteove formule)

$$\alpha + \beta = 2,$$
$$\alpha \cdot \beta = -1,$$
$$\alpha - \beta = 2\sqrt{2}.$$

Dokazat ćemo da je

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n - \beta^n) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]. \end{aligned}$$

Iz $P_n = 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2}$ slijedi

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\cdot(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})\right] \iff$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\cdot P_n &= 2(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \\ &= (\text{zbog } 2 = \alpha + \beta) \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \\ &= \alpha^n - \alpha\cdot\beta^{n-1} + \alpha^{n-1}\cdot\beta - \beta^n + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \\ &= \alpha^n - \beta^n + \alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \\ &= \alpha^n - \beta^n + (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})(\alpha\beta + 1) \\ &= (\text{zbog } \alpha\cdot\beta = -1, \text{ tj. } \alpha\cdot\beta + 1 = 0) \\ &= \alpha^n - \beta^n \end{aligned}$$

i konačno

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]. \quad \blacksquare$$

Iz $2\sqrt{2}\cdot P_n = (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n$ slijedi (primjenom binomne formule $(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \ldots + y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\cdot P_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{2})^k \\ &= 2\cdot\sum_{k-\text{neparan}}\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k. \end{aligned} \tag{5}$$

Iz (5) vidimo da postoji veza između Pellovih brojeva i binomnih koeficijenata. Npr. iz (5) dobivamo:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\cdot P_5 &= 2\cdot\sum_{k-\text{neparan}}^{5}\binom{5}{k}(\sqrt{2})^k \\ &= 2\left[\binom{5}{1}\sqrt{2} + \binom{5}{3}(\sqrt{2})^3 + \binom{5}{5}(\sqrt{2})^5\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[1\cdot\binom{5}{1} + 2\cdot\binom{5}{3} + 2^2\cdot\binom{5}{5}\right] \\ &= 2\sqrt{2}(5 + 2\cdot 10 + 4\cdot 1) = 2\sqrt{2}\cdot 29 \\ &\iff P_5 = 29 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\cdot P_7 &= 2\cdot\sum_{k-\text{neparan}}^{7}\binom{7}{k}(\sqrt{2})^k \\ &= 2\left[\binom{7}{1}\sqrt{2} + \binom{7}{3}(\sqrt{2})^3 \right. \\ &\qquad \left. + \binom{7}{5}(\sqrt{2})^5 + \binom{7}{7}(\sqrt{2})^7\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[1\cdot\binom{7}{1} + 2\cdot\binom{7}{3} + 2^2\cdot\binom{7}{5} + 2^3\cdot\binom{7}{7}\right] \\ &= 2\sqrt{2}(7 + 2\cdot 35 + 4\cdot 21 + 8\cdot 1) = 2\sqrt{2}\cdot 169 \\ &\iff P_7 = 169. \end{aligned}$$

Primijetite da izraze u srednjim zagradama možemo pisati u obliku $\left[2^0\cdot\binom{5}{1} + 2^1\cdot\binom{5}{3} + 2^2\cdot\binom{5}{5}\right]$ i $\left[2^0\cdot\binom{7}{1} + 2^1\cdot\binom{7}{3} + 2^2\cdot\binom{7}{5} + 2^3\cdot\binom{7}{7}\right]$. Možemo reći da smo binomne koeficijente $\binom{n}{k}$ s neparnim k "opskrbili" s koeficijentima 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...

Promotrimo Pascalov[3] trokut:

[3] Pascal Blaise, veliki francuski matematičar.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\ldots$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$	$\vdots$								

Tablica 1.

Pomnožimo li sada svaki stupac u Pascalovu trokutu s $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$ dobivamo:

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\ldots$
0	$1{\cdot}2^0$					
1	$1{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$				
2	$1{\cdot}2^2$	$2{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$			
3	$1{\cdot}2^3$	$3{\cdot}2^2$	$3{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$		
4	$1{\cdot}2^4$	$4{\cdot}2^3$	$6{\cdot}2^2$	$4{\cdot}2^1$	$1{\cdot}2^0$	
5	$1{\cdot}2^5$	$5{\cdot}2^4$	$10{\cdot}2^3$	$10{\cdot}2^2$	$5{\cdot}2^1$	
6	$1{\cdot}2^6$	$6{\cdot}2^5$	$15{\cdot}2^4$	$20{\cdot}2^3$	$15{\cdot}2^2$	
7	$1{\cdot}2^7$	$7{\cdot}2^6$	$21{\cdot}2^5$	$35{\cdot}2^4$	$35{\cdot}2^3$	
$\vdots$	$\vdots$					

Tablica 2.

ili

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\ldots$
0	1					
1	2	1				
2	4	4	1			
3	8	12	6	1		
4	16	32	24	8	1	
5	32	80	80	40	10	
6	64	192	320	160	60	
7	128	448	1120	560	280	
$\vdots$	$\vdots$					

Tablica 3.

Iz tablice 2 dobivamo Pellove brojeve, npr.

$$\begin{aligned}
P_3 &= 4+1=5,\\
P_4 &= 8+4=12,\\
P_5 &= 16+12+1=29,\\
P_6 &= 32+32+6=70,\\
P_7 &= 64+80+24+1=169,\ \ldots
\end{aligned}$$

ili

$$P_3 = 2^2\cdot\binom{2}{0}+2^0\cdot\binom{1}{1}=4\cdot 1+1\cdot 1=5,$$

$$P_7 = 2^6\cdot\binom{6}{0}+2^4\cdot\binom{5}{1}+2^2\cdot\binom{4}{2}+2^0\binom{3}{3}.$$

LITERATURA

1/ J. Carstensen, A. Muminagić: *Pell-tal og Pell-Lucas tal*, Matematik Magasinet, 65, august 2012.

2/ B. Dakić: *Padovanov niz i plastična konstanta*, Miš br. 57, godina 12./2010., str. 83–85.

3/ T. Koshy: *Pell Numbers: A Fibonacci-like Treasure for Creative Exploration*, Matematics Teacher, March 2011.

4/ D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

5/ D. Žubrinić: *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 1997.