

Naučavanje matematike i/ili instant pouke



Šime Šuljić, Pazin

Najbolji način učenja je raditi, pitati i raditi.
Najbolji način poučavanja je poticati učenike da pitaju i rade.
Ne propovijedajte činjenice, potičite na djelovanje.

(Paul Halmos)

Predavanje koje sam pod ovim naslovom održao na stručno-metodičkom skupu u Osijeku izazvalo je buran aplauz nazočnih slušatelja, a interpretacija prigodnih sličica u prezentaciji i pokoji smijeh. Problemi o kojima sam govorio u stvari vrlo su ozbiljni problemi s kojima se susreće svaki učitelj i nastavnik matematike. U ovom članku ću predstaviti te probleme i pokušati naznačiti moguće izlaze iz njih. Ukoliko želite pogledati samu prezentaciju naći ćete je na stranicama www.normala.hr.

Da se sve više susrećemo s miješanjem javnosti, stručne i nestručne, u probleme koji su vezani za nastavu matematike više-manje svi osjetimo bez obzira radimo li u osnovnoj ili srednjoj školi. U mnogim uvodnicima ovog časopisa pisalo se o tom problemu, a članak *Zašto je matematika bauk?* u prošlom broju reakcija je na neke grube napade na nastavnike matematike objavljene u dnevnom tisku krajem prošle nastavne godine. Ako nastavnik matematike stane razmišljati o svim tim napadima ali i naoko dobronamjernim savjetima, lako se može naći u poziciji koju najbolje opisuje poznata priča o *Mlinaru, sinu i magarcu*.

Mlinar, sin i magarac

Jednog dana podoše mlinar i njegov sin prodati magarca u obližnji grad na sajam. Usput ih vidješe neke djevojke koje su hihotala i dobacivale im: "Vidi smiješnih li ljudi, idu za magarcem umjesto da ga uzjašu". Mlinar nato zapovijedi sinu da uzjaše magarca. Sin poslušao i oni nastave put. Pri prolasku kroz drugo selo ljudi stadoše glasno negodovati: "Gledaj kakva je to mladež danas, on bezbrižno jaše dok umorni otac hoda za magarcem". Mlinar na to reče: "Dobro vele ljudi, mlad si, tvoje su noge snažne, hajde da se zamijenimo". I tako sin sjaše, a otac uzjaše. Nakon nekog vremena ugledaše ih neke žene s djecom i izravno rekoše: "Kako te nije stid da ovako mlado dijete siliš da gotovo mora trčati za magarcem". Mlinar se osvrne i vidje da mu sin zaista umoran zaostaje, pa pozove i njega da sjedne na magarčeva leđa. Tako su stigli do grada. U predgrađu im jedan čovjek reče: "pretežak ste vi teret za tako malu životinju. Koliko ste jaki, vi biste njega trebali nositi". Mlinar malo razmisli, pogleda umornog magarca pa mu se učini da takav nije najbolji za prodaju. Sjašu, svališe ga, vezaše noge i uz pomoć povećeg kolca stadu nositi na ramenima

između sebe s nogama u zraku. Tek sada su izazvali salve smijeha kod mnoštva građana. Životinja se preplaši tog urnebesa i galame, pokuša se osloboditi što mu nekako i uspije na jednom mostu, pa pobjegne uz rijeku na slobodu.

Posramljeni mlinar reče sinu: "Pravo nam i budi kad smo radili samo ono što su nam drugi govorili. Ne samo da nam to nije pričinjalo nikakvo zadovoljstvo, nego smo i magarca izgubili".

Kad im nitko nije objasnio

Ako nakon ove priče malo razmislite, sjetite se tko je sve na vašoj lokalnoj razini u zadnje vrijeme prozborio o matematici kao problemu, brzo pronašao uzrok problema i spasonosnu formulu za izlazak iz problema, onda bi tu mogla biti široka plejada 'stručnjaka'. Od učenika i roditelja, preko razrednika, školskog pedagoga i ravnatelja, do susjeda inženjera, instruktora svih profila, nastavnika drugih predmeta, pa i samih kolega učitelja i nastavnika matematike ili studenata matematike i sveučilišnih nastavnika matematike! Gotovo svi koji su se sreli s učenikom koji im se obratio za pomoć, krenuli su od pretpostavke da tom učeniku rješavanje određenog zadatka nitko dosad nije, ili nije dobro objasnio. Zar je tomu baš tako?

Početkom ove nastavne godine učenicima prvog razreda smjera prodavač, postavio sam ovakav zadatak:

Vijak stoji 0.55 kn, a tipla 0.35 kn. Matko želi kupiti jednak broj vijaka i tipli za 20 kn. Koliko najviše parova može kupiti za 20 kn i koliko mu je potrebno vratiti novca?

Da ih ne bi opterećivali pojmovi tipla i vijak, uz zadatak su imali ilustraciju s istaknutim cijenama. Na raspolaganju su imali kalkulatora i radili su u grupama po troje. Riječ je o učenicima koji su svi odreda došli iz osnovne škole s niskim ocjenama ali i zadatak je takav da ga uz dovoljno vremena i međusobnu raspravu mogu riješiti. Međutim, nije to išlo nimalo glatko. Počevši od toga da uopće nisu pročitali zadatak, a kad jesu onda su to napravili bez razumijevanja i nesposobni prepričati zadatak. Do toga da su očekivali da ima kažem treba li pomnožiti ili podijeliti. Naravno da sam odolio tom 'sirenskom zovu' i ustrajao samo na tome da riješe

bilo kako ali da znaju obrazložiti da ni kupac ni prodavač nisu oštećeni. I to je potrajalo osim u jednoj grupi u kojoj su dvije učenice to brzo riješile. Ovaj primjer ne navodim zbog nekog metodičkog pristupa, a još manje zbog zgražanja nad neznanjem, nego iz potrebe da si postavimo jedno drugo prirodno pitanje. Ovi učenici došli su iz dvadesetak različitih razreda, a samim time imali su otprilike toliko različitih učitelja u osmom razredu. Budući da je riječ o decimalnim brojevima rekli bismo da zadatak pripada petom razredu ali po svojoj naravi traženja omjera dviju veličina, što i jest predstavljao problem, povlači se od drugog do osmog razreda. Dakle, njih je taj problem poučavalo četrdesetak ili čak i više učitelja. S kojim pravom bih mogao smatrati da toliki broj kolega nije dobro odradilo posao? Još veća bi zabluda bila očekivati da će nakon mojeg objašnjenja sada sve teći kao podmazano! Problem leži u nečem drugom, a ne u *objasniti*.

Zar je samo matematika problem?

Ali ne komentiraju samo promatrači iz našeg lokalnog okruženja kako treba 'jahati matematiku'. Tu su ljudi na pozicijama u obrazovnom sustavu, istraživači s raznih instituta, stručnjaci raznih profila koji nastupaju u medijima, internetski gurui, pa i oni iz matematičke zajednice koji su zaboravili na Euklidovo upozorenje da nema kraljevskih putova u geometriji. A to je gotovo aksiom u naučavanju matematike, čijim uvažavanjem moramo razmisliti što možemo napraviti. Sve drugo što nam se u današnjem svijetu nudi kao čarobni štapić za učenje matematike, treba vrlo kritički prihvaćati.

Zanimljivo je da toliki broj stručnjaka, koji upire prstom u nastavu matematike, uglavnom ništa ne govori o problemima obrazovnog sustava u cjelini, a još manje o drugim obrazovnim područjima. Puno šire problem vidi Pasi Sahlberg, matematičar po primarnom obrazovanju, jedan od poznatijih svjetskih stručnjaka za područje razvoja obrazovnih politika i reformi te obrazovanja za ekonomsku konkurentnost. Hrvatskoj javnosti poznat je kao autor knjige "Finske lekcije: Što može svijet naučiti od obrazovne reforme u Finskoj". Kao suradnik Svjetske banke 2005. godine dobro je upoznao hrvatski obrazovni sustav. Gostujući u emisiji *Paralele* Hrvatske televizije 29. 11. 2012. je rekao: "Primarni problem

hrvatskog obrazovnog sustava je što vaša djeca ne svladaju predviđeno gradivo i postižu mnogo manje odličnih rezultata iz materinskog jezika, prirodnih predmeta i matematike od drugih nacija". Osim PISA testiranja na koje se Sahlberg referira tu su i rezultati Državne mature, koji također ukazuju da problem ne leži samo u jednom predmetu.

O instrukcijama

O instrukcijama je već dovoljno rečeno na stranicama ovog časopisa, a pogotovo u uvodnicima. Možda vam je još u sjećanju istinita zgodica objavljena prije otprilike godine dana:

"Prije nekoliko mjeseci sretnem na tržnici prijatelja i kolegu, umirovljenika H., pa mi on priča: Zamolili ga za instrukcije a on, premda nerado, prihvatio. Drugi razred, eksponencijalne i logaritamske jednadžbe. Sjednu H. i njegova učenica za stol i on ubrzo shvati da djevojka ne zna niti najosnovnije činjenice. Uopće ne zna što je eksponencijalna funkcija, ne zna što je logaritam, ne zna pravila logaritmiranja. Ništa! Pa on onda polako krene. Najprije će malo ponoviti o eksponencijalnoj funkciji, zatim će to povezati s logaritmima, pa će malo o svojstvima logaritma. Cura ga prekine: To njoj ne treba, to je za nju gubljenje vremena, ona nije zbog toga došla. Ona treba (samo) jednadžbe. Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe. Vadi nekakav papirić:

– Evo, ovakve će doći. Samo to mi treba."

Rečeno je dovoljno i o raznim "istraživanjima". Istina je da nemali broj učenika postupa pred ispit baš poput djevojke iz ove zgodice ali što bi trebalo značiti da 60% gimnazijalaca uzima instrukcije? U jednom je bombastičnom članku stršilo čak i 90%! Potaknut raspravom na portalu *Connect* (www.znanost.org) postavio sam nekoliko zadataka koji dovode prezentirane brojke pod znak pitanja.

Napomena. Zadatke možete prilagoditi svojoj sredini, a riješiti ih možete i uz pomoć instrukcija, ako je to potrebno.

1. Ako 60% gimnazijalaca ide na instrukcije, a u Pazinu je 600 gimnazijalaca, koliko ih treba instrukcije?

2. Ako svaki instruktor održi 10 sati instrukcija tjedno, koliko je potrebno instruktora da svaki od 360 učenika dobije 2 sata instrukcija?
3. (*Projektni zadatak.*) Istražite koliko ima nastavnika matematike i koliko bih ih se još moglo zaposliti/uvesti za instrukcije.

Odgovore na sljedeća pitanja obrazložite:

4. Ako 60% naših učenika uzima instrukcije, kako to da istovremeno 70% njih završava školovanje s odličnim uspjehom?
5. Zašto u naše vrijeme nitko nije išao na instrukcije?
6. Je li program bio lakši, a nastavnici sposobniji?
7. Zašto se blagonaklono gleda na škole stranih jezika ali ne i na instrukcije iz matematike?
8. Ide li se na instrukcije da bi se naučilo matematiku?
9. Kako to da učenici koji su malo uspješniji u matematici, ne nužno odlični, svi redom izjavljuju da su matematiku naučili na satu? Često izjavljuju da je matematika predmet koji ne treba učiti.

Video predavanja na Mreži

Snimljena video predavanja, obično vrlo kratke lekcije, odnosno postupci rješavanja zadataka već su dulje prisutni u svijetu. Unazad nekoliko godina i u nas, a u zadnje vrijeme niču kao gljive poslije kiše. Uz to u posljednjih nekoliko mjeseci mediji su ih lansirali kao čaroban štapić nakon kojeg više nitko neće imati problema s matematikom. Ti video zapisi ne nose nikakvu inovaciju u samom pristupu obrade nastavnih sadržaja od onog koji se primjenjuje u učionici. Riječ je o klasičnom predavanju sa zapisivanjem na ploču ili papir. Jedino Internet omogućuje laku pretragu, a računalo mogućnost ponavljanja i zaustavljanja videa. Neki su novinari, a još više komentatori članaka, čudotvornost pripisali samom predavaču i tvrde da nitko dosad nije tako dobro objašnjavao. Zar? Aktivnih nastavnika matematike ima oko tri i pol tisuće. Tako nam Gaussa, našlo bi se tu dobrih predavača!

U matematičkoj zajednici u svijetu o tom fenomenu vođena je burna rasprava, a i rađena su eksperimentiranja u školskoj praksi. Naravno, izjave su puno suzdržanije od naših euforičnih učenika i

studenata, korisnika tih video uradaka. Nitko ne osporava da takvo što može učeniku poslužiti ali upozoravaju na drukčiju prirodu učenja matematike. Slično misle i naši nastavnici. Izdvojio bih mišljenje trojice nastavnika iz rasprava od prije nekoliko mjeseci:

- “Korisnici videa redom rabe izraze *dobro prenosi znanje* i *pomoglo mi je položiti ispit*. Najvažnija uloga učitelja danas više nije da prenosi znanje, već je potrebno da vodi kroz proces učenja, a ovdje je očito najvažnije pokupiti znanje da bi se položilo, dobilo ocjenu. Makar se stalno ističe otkrivanje zabavne strane matematike, nikakve zabavnosti i ljepote ne nalazim u tim postupcima, jer uglavnom je riječ o šturim postupcima.” (nastavnik, Hrvatska)
- “Bit je učenika dovesti u stanje da razmišlja i uči misliti. Nekako nam je sve počelo biti zgotovljeno, studenti samo gledaju da uče testove zadnjih rokova i pitaju se što je bilo, hoće li se ponoviti po istom šablonu. A većina profesora je podlegla tome pa im daju da tako bude. Zanimaruje se smisao predmeta.” (asistent, BiH)
- “Mislim da narušava ideju matematike i kao predmeta i kao znanosti. Jedno je poučavati matematiku, a drugo nuditi prečice do pozitivne ocjene. To su dva bitno različita pristupa i shvaćanja.” (učitelj, Hrvatska)

Uvod u matematičko mišljenje

Jedno je izgleda sigurno, sve više ćemo učiti *online*. Zanimljiva koincidencija. Dok je proteklih mjeseci u nas učenje matematike preko video zapisa postalo hit, poznati britansko-američki matematičar Keith Devlin, profesor na Stanfordu i direktor H-STAR instituta, popularizator matematike, autor mnogih knjiga, stalnih kolumni i radijskih emisija, kreirao je i vodio *online* tečaj *Uvod u matematičko mišljenje* u okviru poznatih Stanfordovih tečaja. Taj je tečaj uspješno pohađalo čak 16 tisuća studenata iz svih krajeva. Za vrijeme trajanja tečaja, a i sada naknadno, Devlin je pisao blog osvrćući se na mnoge aspekte istinskog učenja matematike. Tako 21. 9. 2012. piše:

“Za neke su predmete (video) predavanja glavni dio tečaja. Ali za poimanje matematike, a moj tečaj je upravo to, predavanje je jedna od najmanje važnih

značajki. Učenje matematike je poput učenja plivanja, vožnje bicikle, skijanja, igranja golfa ili sviranja instrumenta. Vjerojatno ćete dobiti neku ideju dok vam netko objašnjava ali ne možete svladati te vještine na taj način. Ključno je *učiti* i *raditi*. Doista, postoji samo jedan način učenja kako **raditi** nešto, a to je radeći to nešto. Ili sasvim otvoreno, jedini put do majstorstva je ponavljanje grešaka. Pokušavati dok ne uspijete! Pomoći vam može netko tko je već svladao majstorstvo da pogleda vaše pokušaje i da vam konstruktivne povratne informacije.”

Polemizirajući s onima koji se zalažu da okosnica *online* učenja budu video klipovi u stilu popularnog Salmana Khana, Devlin piše: “Siguran sam da to nije najbolji put jer za većinu disciplina ključ stvarnog učenja je dvosmjerna interakcija, interakcija čovjek-čovjek, štoviše u nekim slučajevima i višesmjerna interakcija između više osoba, a **ne jednosmjerne instrukcije**”. (<http://moocstalk.org>)

Može li matematika uopće biti laka?

Kada je svojevremeno tvrtka *Mattel*, koja proizvodi globalno popularnu lutkicu *Barbie*, izbacila model lutke koji je izgovarao nekoliko rečenica, a između ostalih i rečenicu “Matematika je teška”, cijela se matematička zajednica Sjedinjenih Američkih Država digla na noge. Svakako nije dobro da se djevojčice, koje se pretežito igraju s tom igračkom, obeshrabruje u učenju matematike ali *Barbie* baš i nije bila u krivu, odnosno nisu u pravu oni koji su tvrdili da matematika nije teška već je samo drukčija. Evolucija nam je podarila mozak koji može osim reakcije na osjetilne podražaje izvana, razmišljati *offline* o objektima ili predmetima koji im sličje. *Offline* razmišljanje je promišljanje o svijetu zamišljenih simbola. Keith Devlin u knjizi *Matematički gen* kaže:

“Za matematiku je potrebno *offline* razmišljanje o potpuno apstraktnim objektima koji uopće nisu povezani s ničim iz stvarnog svijeta. Naš mozak mora stvoriti obrasce djelovanja koji se razlikuju od posljedica osjetilnih podražaja. Znamo da su za to sposobni gotovo svi pripadnici ljudske vrste, jer je upravo to preduvjet osjećaja za broj i svladavanja raznih apstraktnih značenja u modernom životu, poput pojmova braka, vlasništva ili zaduženosti. Ipak,

najčešće nam se *offline* razmišljanje čini teškim. Sa subjektivnog stajališta, mozak novu apstrakciju prihvaća pokušavajući je učiniti stvarnijom kroz upoznavanje koje proizlazi iz neposrednog dodira s apstraktnim pojmovima. A to zahtijeva naporan rad.”

Erlina Ronda, svjetski poznata filipinska metodičarka, na svom blogu (math4teaching.com) na kojem svaki tjedan daje vrlo korisne metodičke članke o pojmovima, problemima i raznim aspektima suvremene nastave istakla je moto: *Ovdje ne pišem kako matematiku učiniti lakom jer ona to nije, nego kako je činiti smislenom što i jest.*

Akceptirajući složenost u učenju matematike Ronda naglašava da su za dobru nastavu vrlo važne četiri slobode koje učenik treba imati u učionici:

- slobodu da može pogriješiti,
- slobodu postavljanja pitanja,
- slobodu razmišljanja svojom glavom,
- slobodu u izboru metode rješavanja.

A što kažu učitelji učitelja

Georgea Polyju američki matematičar Philip Davis u knjizi *Doživljaj matematike* naziva učiteljem učitelja. I doista on je razvio takav pristup poučavanju matematike koji inspirira i današnje metodičare. Izdvojio bih dvije njegove velike misli koje su aktualne baš za situaciju koju opisujemo. Prvu možemo smatrati upućenom učitelju: *Važno je što učitelj kaže ali je ti-suću puta važnije što učenik misli.* Drugim riječima, jesu li naše riječi i postupci usmjereni na to da se potakne učenika na razmišljanje? Druga je izravno upućena učeniku: *Ako ne možeš riješiti problem, postoji lakši koji možeš riješiti. Nadi ga!* Dakle, nije potrebno otrčati instruktoru realnom ili virtualnom.

Problem s kojim se danas susrećemo nije ni toliko nov. U jednoj raspravi među američkim matematičarima od prije četrdesetak godina Paul Halmos govori o tome kakvog učitelja učenici neće baš *ljakati* kako bismo to učeničkim jezikom danas kazali. Citiram: “Dobar učitelj ne može biti baš popularan (osim možda kod svojih bivših učenika), jer neki učenici ne vole što ih izaziva, što ih pita, što im dosađuje i što ih iritira, ali takav učitelj proizvodi bisere”.

Pouka priče

Bez obzira na zgražanje okolnog svijeta, kao što je u redu da mlinarov sin hoda za magarcem jer je mlad i ima snažne noge, isto tako je sasvim u redu da rješava matematičke zadatke koji nisu lagani. Neurolozi bi kazali kako je takvo što zdravo i potrebno za učenikov mozak. Uz zahtjevnost i malo više kriterije, potrebna je ljudska toplina i razumijevanje za učenika kao što je to mlinar imao za svog sina. Jedino što nije potrebno slušati nerazumne zahtjeve slučajnih promatrača.

Prilog

Deset znakova Erlina Ronda koji ukazuju da s vašom nastavom nešto ne valja (math4teaching.com)

1. Kada test uključuje zadatke poput ovog: *U jednadžbi $3x^2 - 4x - 1 = 0$, odredite vrijednosti a, b i c.*
2. Kada čujete jake argumente treba li ili ne staviti **AB** u apsolutne zagrade kad je riječ o duljini dužine.
3. Kada razredom zavlada rutina: učitelj predaje, učitelj dijeli radne listove, učitelj skuplja radne listove.
4. Kada nastavna jedinica uvijek započinje vježbanjem postupaka kao što su računanje s cijelim brojevima, razlomcima i slično.
5. Kada učenici rješavaju problemski zadatak ra-beći isključivo učiteljevu metodu.
6. Kada nastava započinje s definicijom pojma koji se uči.
7. Kada zadatak poput ovog: *Ako je $2x^2 - 8 = 15$, koliko je $2x^2 - 5 = ?$ učenik rješava tražeći naj-prije vrijednost od x i tek onda $2x^2 - 5$.*
8. Kada je stil poučavanja isti za učenje definicije kosinusa i dokazivanje adicijskih formula.
9. Kada se zadaci problemskog tipa zadaju samo kao primjena, uvijek na kraju nastavne jedinice ili poglavlja.
10. Kada učitelj najprije objasni teorem, a onda po-segne za računalnim programom dinamične ge-ometrije da pokaže da teorem vrijedi.