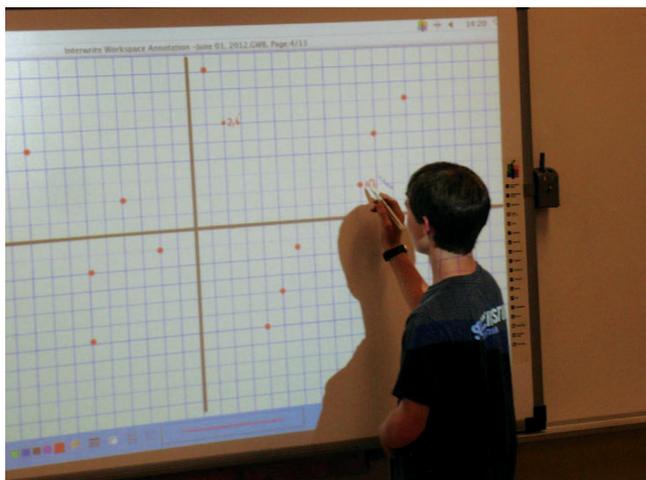


Uvod u koordinatni sustav i jednadžbu pravca uz pomoć gotovih obrazovnih materijala na internetu

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

Neki dijelovi nastave matematike osnovne i srednje škole još se uvijek izvode na tradicionalan način, unatoč mogućnostima što ih pruža suvremena nastavna tehnika i tehnologija. Takvo je i gradivo koje se uobičajeno svrstava pod analitičku geometriju ravnine.



Nastavni planovi i izvedba

S pravokutnim koordinatnim sustavom u ravnini učenik se susreće u sedmom razredu osnovne škole. Tada se prvi put susreće s točkama u koordinatnoj ravnini i s jednadžbom i grafiom pravca. Ne bi li bilo prirodno, nakon što se usvoji očitavanje koordinata točke u koordinatnoj ravnini i određivanje točke sa zadanim koordinatama, uvesti pravac kao skup točaka? Međutim, pravac se uvodi kao graf linearne funkcije. Nakon toga i u prvom razredu gimnazije opet se pravac uvodi kao graf linearne funkcije, da bi se naknadno prešlo na jednadžbu pravca. Smatram da je to jedan od uzroka nerazumijevanja osnovnih postavki analitičke geometrije i poslije stvara dodatne teškoće u svladavanju krivulja drugog reda. Analitička geometrija temelji se na činjenici da je svaka krivulja ili ploha skup svih onih točaka koje zadovoljavaju neko određeno svojstvo. To svojstvo možemo izreći opisno ili zapisati simbolički. Na taj način probleme koji su u biti geometrijski rješavamo algebarskim metodama.

Činjenicu da su pravac, kružnica, konike skupovi točaka kojima koordinate zadovoljavaju određeno svojstvo učenicima prezentiramo tek u srednjoj školi. Ponegdje tek u trećem razredu kada se uvode krivulje drugog reda. Tada je već prekasno, preskočen je period osnovnog razumijevanja novog i do tada nepoznatog gradiva. Zašto se pravac obrađuje na jedan način, a krivulje drugoga reda na drugi? Naime, kod pravca kreće se od linearne funkcije i njezina zapisa, pa se toj funkciji pridružuje njezin graf koji predstavlja pravac (nemojmo tu zanemariti ni činjenicu da postoje pravci koji nisu grafovi linearne funkcije), i učeniku pro-makne zajedničko svojstvo koordinata svih točaka tog pravca. Ta se činjenica uvodi posredno, preko funkcije, jednog novog matematičkog objekta kojeg učenik prije nije sretao u nastavi matematike. Njemu predstavlja napor svladati tu zavisnost jedne varijable o drugoj i zapis funkcije, a istovremeno mora toj funkciji pridružiti i graf (pravac) i njegovu jednadžbu. To je previše povezanih, a različitih podataka koje učenik prije nije savladao. Zato me ne

čudi da učenici prvog razreda na pitanje – što je funkcija – često odgovaraju da je to pravac. Kod kružnice i ostalih krivulja drugog reda kreće se odmah od svojstva točaka koje pripadaju toj krivulji i na osnovi tog svojstva izvodi se jednadžba krivulje. Smatram da bi se na jednak način trebala uvesti jednadžba pravca i graf pravca, a linearna funkcija (i sve ostale funkcije) obrađivati odvojeno. Kada se dobro savlada jedno i drugo, tada se može uspostaviti poveznica između linearne funkcije i pravca, odnosno njegove jednadžbe.

Prijedlog

Prvi bi susret s pravcem trebalo napraviti preko uvjeta (svojstva) koje zadovoljavaju koordinate točaka što pripadaju tom pravcu. Naravno, prije toga učenici trebaju dobro savladati snalaženje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Možda će u tu svrhu nastavnicima poslužiti apleti koji se nude na *riznici matematičkih apleta* <http://apleti.normala.hr>. U poglavlju **koordinatni sustav** možete naći aplet s vježbanjem ucrtanja točaka zadanih koordinata u koordinatni sustav, kao i s vježbanjem očitavanja koordinata već ucrtane točke. Aplet je postavljen pod naslovom **Koordinatni sustav**. To se može zadati učenicima za samostalan rad kod kuće ili vježbati u razredu. Nakon toga možete iskoristiti interesantan i vrlo koristan aplet za ucrtanje točaka kojima su koordinate zapisane razlomkom. Aplet je napravljen poput igre, pa osim uvježbavanja potiče maštu učenika i dodatno ih motivira za postizanje cilja – postavljanja točke na točnu poziciju u koordinatnoj ravnini. Potražite ga pod nazivom **Točka zadana razlomkom**.

Mnoge korisne materijale naći ćete i na međunarodnom skladištu apleta **GeoGebraTube**-u, iako je ono dosta nepregledno i potrebno se priviknuti na pretraživanje. Ako na popularnim oznakama pritisnete gumb s natpisom **linear**, dobit ćete deset stranica raznih apleta. Tu se osim jednadžbe i grafa pravca nalaze i apleti s linearnim programiranjem, linearnim nejednadžbama, pravcima regresije, sustavima linearnih jednadžbi itd. Ipak, izdvajam jedan aplet – Pronađi blago – koordinatni sustav –

<http://www.geogebraTube.org/material/show/id/1169>. Nakon dobre vježbe, neće biti problema s točkama u koordinatnoj ravnini. Interesantno je da učenicima snalaženje u koordinatnoj ravnini najčešće ne predstavlja velik problem, ali jednadžba pravca i graf linearne funkcije predstavljaju. Nerijetko učenici trećeg razreda srednje škole još uvijek ne znaju nacrtati graf pravca zadan jednadžbom.

Primjer 1. *Rasporedi točke tako da razlika apscise i ordinate svake točke bude jednaka 1.*

Uvjet se moglo iskazati i simbolički, odnosno jednadžbom: $x - y = 1$.

Aplet može prikazati sve točke koje zadovoljavaju tu jednadžbu.

Upiši tu jednadžbu u polje:

Pritisni tipku <Enter>.

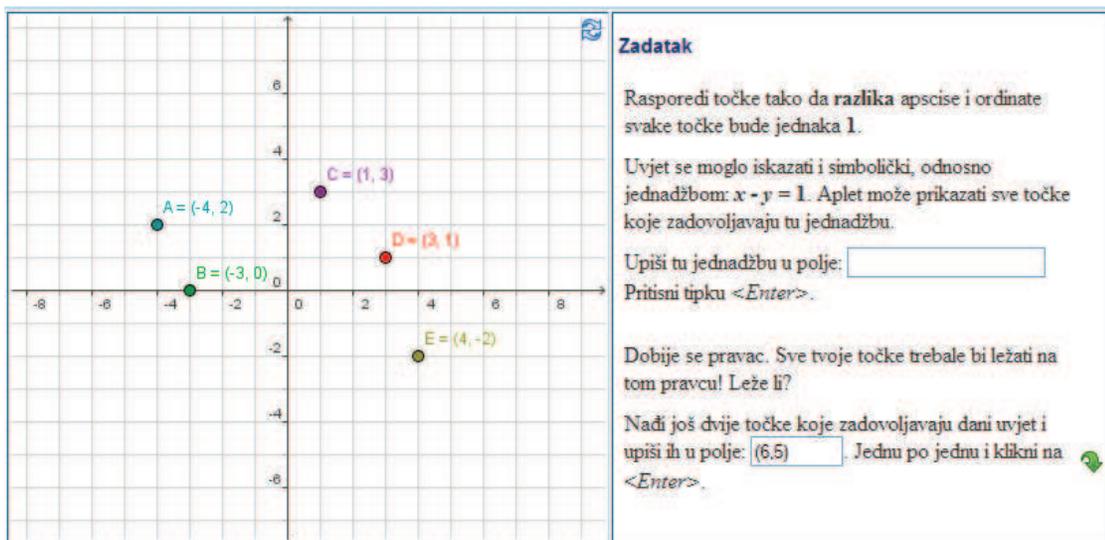
Dobije se pravac. Sve tvoje točke trebale bi ležati na tom pravcu! Leže li?

Ovo je tekst koji je napisan pokraj apleta što uvodi učenike u jednadžbu pravca i dio je didaktičkih obrazovnih materijala u sklopu interaktivne matematike <http://www.normala.hr/interaktivna-matematika>.

Učenik samostalno može odrediti nekoliko točaka sa zadanim svojstvom. Kada točno izračuna i postavi točke, uviđa da su točke raspoređene linearno, da pripadaju pravcu. Dalje aplet sam crta sve točke sa zadanim svojstvom i učenik uočava da je to uistinu pravac kojemu odgovara simbolički zapis zadanog uvjeta. Na taj se način prirodno uvodi jednadžba pravca i ta veza usvaja se bez posrednika – linearne funkcije – koja kamuflira i otežava proces poimanja.

Još su zadana dva primjera s različitim uvjetom. Tako učenik samostalno uvježbava crtanje točaka kojima koordinate ispunjavaju zadano (linearno) svojstvo. Uočiti će da uvijek sve točke s koordinatama koje ispunjavaju zadani uvjet leže na istom pravcu i da je simbolički zapis tog uvjeta jednadžba pravca.

Nakon toga vježba se crtanje pravca iz zadane jednadžbe. Ako je dobro nacrtao pravac, učenik skuplja nagradne bodove što može biti dodatna motivacija prilikom uvježbavanja.



Zadatak

Rasporedi točke tako da **razlika** apscise i ordinat
svake točke bude jednaka 1.

Uvjet se moglo iskazati i simbolički, odnosno
jednadžbom: $x - y = 1$. Aplet može prikazati sve točke
koje zadovoljavaju tu jednadžbu.

Upiši tu jednadžbu u polje:

Pritisni tipku <Enter>.

Dobije se pravac. Sve tvoje točke trebale bi ležati na
tom pravcu! Leže li?

Nađi još dvije točke koje zadovoljavaju dani uvjet i
upiši ih u polje: . Jednu po jednu i klikni na
<Enter>.

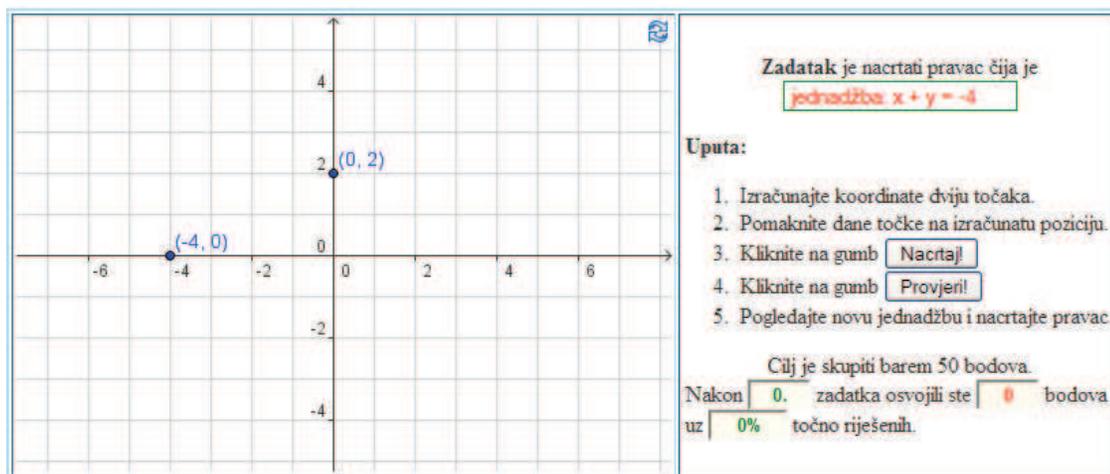
Tek nakon što je dobro izvježbano crtanje točaka čije koordinate zadovoljavaju zadani uvjet te crtanje pravca iz jednadžbe (u implicitnom zapisu), prelazi se na eksplicitni zapis jednadžbe pravca. I dalje se ne uvodi pojam koeficijenta smjera i odsjeka na osi y , već se vježba crtanje pravca zapisanog u eksplicitnom obliku pomoću dviju točaka kojima učenik treba izračunati koordinate.

Nakon toga se ispituje utjecaj koeficijenata a i b u zapisu $y = ax + b$ i uvodi pojam koeficijenta smjera i odsjeka na osi y . Tek tada, i kada je sve pret-

hodno svladao, učeniku se nudi aplet s crtanjem pravca pomoću odsjeka i nagiba.

Smatram ovaj način puno prirodnijim i bližim razumijevanju jednadžbe pravca. Zato svakako posjetite stranicu interaktivne matematike i pokrenite materijal *Jednadžba pravca i graf linearne funkcije*, ili ga možete preuzeti i u zipanom formatu za offline pregled.

Ako nemate računalo u razredu ili ga ne možete koristiti, ipak preporučujem da se upoznavanje s prav-



Zadatak je nacrtati pravac čija je
jednadžba: $x + y = -4$

Uputa:

1. Izračunajte koordinate dviju točaka.
2. Pomaknite dane točke na izračunatu poziciju.
3. Kliknite na gumb **Nacrtaj!**
4. Kliknite na gumb **Provjeri!**
5. Pogledajte novu jednadžbu i nacrtajte pravac.

Cilj je skupiti barem 50 bodova.
Nakon zadatka osvojili ste bodova
uz točno riješenih.

cem i linearnom jednadžbom uvodi prema ovom predlošku, a ne kako smo do sada navikli.

Zanimljiv je jednostavni aplet francuskog matematičara i poznatog *GeoGebra* majstora Daniela Mentrarda: EQUATION DE DROITE : $y = ax + b$ (Jednadžba pravca $y = ax + b$) za pogađanje nagiba, odječka i jednadžbe pravca u eksplicitnom zapisu koji je postavljen na *GeoGebra* skladištu **GeoGebra Upload Manager**. Možete doći do njega i preko poveznice <http://dmentrard.blogspot.fr/2012/07/linear-coefficients.html>. Zgodan je za vježbanje pogađanja.

Šteta što je pisano na francuskom, ali se bez problema možemo snaći u apletu. Čak i jeziku možete lako doskočiti – otvorite *GeoGebru 4.0*, u izborniku *Datoteka* odaberite *Otvori web stranicu* te u ponuđenom prozoru unesite *web* adresu. Sada svaki tekst možete urediti i prebaciti na hrvatski jezik, spremite na svoje računalo i pokazivati učenicima. Čak ne morate imati pristup internetu.

Pogledajte mnoštvo vrijednih apleta koje nam je ustupio taj francuski matematičar. On je napravio čitavu kolekciju apleta za osnovnu školu – dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/Elementaire/Elementaire.htm. Na njegovoj stranici <http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/index.htm> naći ćete mnoštvo materijala iz matematike i fizike.

Nastavnicima osnovne škole svakako će biti interesantni i materijali koji se nalaze na stranicama Antonije Horvatek: <http://public.carnet.hr/ahorvate/>.

Internet je prepun gotovih materijala koji se nude i koji nam mogu biti od velike pomoći. Ipak, dan je prekratak za pregledavanje svih materijala i odlučivanja jesu li pogodni za upotrebu ili ne. Prednost materijala rađenih u *GeoGebri* je u tome što se mogu mijenjati i prilagođavati potrebama. U članku sam navela nekoliko adresa na kojima možete naći mnoštvo korisnih materijala iz svih područja osnovnoškolske i srednjoškolske matematike. *GeoGebra* nam sada nudi neslućene mogućnosti. Negdje na bespućima interneta postoje uradci koji nude baš ono što vam treba.

Leo Budin, Predrag Brođanac,
Zlatka Markučić, Smiljana Perić

novo!



12395.

RJEŠAVANJE PROBLEMA PROGRAMIRANJEM U PYTHONU

380 str., 20 × 24 cm, u boji, 130 kn.

Posljednjih nekoliko godina programski jezik **Python** sve se više rabi kao programski jezik za poučavanje programiranja. On je dovoljno jednostavan i lako ga savladavaju početnici u programiranju, a blizak je i današnjim objektno usmjerenim jezicima.

www.element.hr



2
godina s vama