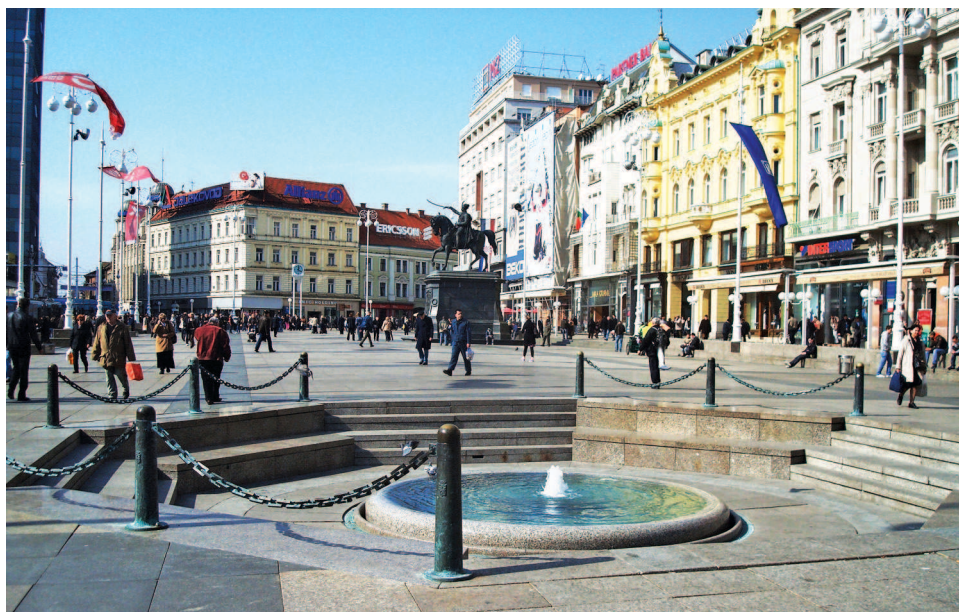


Skitam i snimam: osmerokut

Branimir Dakić, Zagreb



Kad je riječ o originalnim i kreativnim rješenjima u okvirima suvremenih metodičkih postupaka i oblika u nastavi matematike, možemo se pohvaliti kako na stranicama MiŠ-a imamo na tu temu lijepu zbirku radova naših vrijednih nastavnika matematike u kojima opisuju svoja osobna iskustva. Čini se kako idejama nema kraja, a stvoren je opći dojam da su među matematičarima objeručke prihvaćena ona načela suvremene nastave koja se odnose na povezivanje matematike i stvarnosti. Ovaj članak trebao bi biti tek još jedan doprinos na istom tragu, a posljedica je mojih osobnih promišljanja o tome kako se može doživjeti prirodna okolina (u ovom slučaju grad Zagreb) promatrana kroz posebne, *matematičke naočale*. Doduše, bit će riječ tek o obradi jednog detalja – pravilnog osmerokuta koji zatječemo gotovo na svakom našem koraku pri obilasku Zagreba, no mogao bi to biti poticaj i za da-

linje istraživanje u sličnim smjerovima. Matematika se pritom spontano povezuje sa sadržajima raznih područja, a ne zaboravimo niti još jednu vrlo vrijednu odgojnu sastavnicu – emotivno doživljavanje i vezanje uz sredinu u kojoj živimo.

Pa stavimo sada naše *matematičke naočale* i krenimo. Gotovo svaki obilazak Zagreba počinje sa središnjeg gradskog trga – Trga bana Jelačića. Ovaj trg, za *purgere*¹ *Jelačić plac*, nastao je sredinom 17. stoljeća kada su gradski oci odlučili raskršiti vrtove oko izvora Manduševac i na tom mjestu, pogodnom zbog blizine i Griča i Kaptola, urediti prostor sajmišta. S vremenom je Trg mijenjao svoj lik, a osobito je preuređen nakon razornog potresa 1880. godine kada su na njegovoj sjevernoj strani izgrađene nove zgrade, one koje se tamo nalaze i dan-danas.

¹ *Purger* je danas naziv za stanovnika Zagreba koji prihvaća lokalne tradicije i predan je svojem gradu. Nekada su purgeri bili samo oni građani čiji su predci bili kroz više generacija rođeni Zagrepčani. Sama riječ iskrivljena je njemačka riječ *Bürger* – građanin.



Na istočnoj strani Trga bana Jelačića nalazi se fontana Manduševac. Nekada je tu bio zdenac s pitkom vodom no prigodom popločavanja Trga 1898. godine zdenac je zatrpan i na njega se zaboravilo. Kad je 1986. temeljito obnavljan pločnik Trga, naišlo se na tragove zdenca pa je odlučeno da se obnovi. Danas je Manduševac fontana – jedno od omiljenijih mjesta u gradu.

Uz Manduševac je vezana legenda o podrijetlu naziva grada. Lijepa djevojka Manda na zdencu je zatekla mladog časnika koji ju je zamolio:

*"Mando dušo, **zagrabi** mi malo vode."*

Po *"Mando dušo"* zdenac je dobio ime Manduševac, a od onoga *"zagrabi"* nastane ime grada – Zagreb.

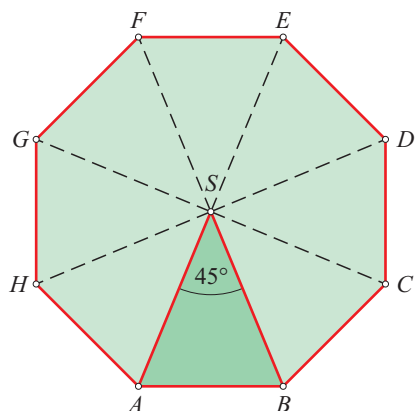
Kad se iz ptičje perspektive pogleda na Manduševac, uočava se kružni obrub samog zdenca te oko njega osmerokutni kameni okvir. Zapravo je riječ o betonskim stubama kojima se prilazi samom zdencu i koje su mjesto odmora umornim šetačima ili pak onima koji žele promatrati vrevu glavnog gradskog trga.



Foto: Ivo Pervan (s dopuštenjem)

Ovu zgodnu geometrijsku kompoziciju zasigurno će zamijetiti matematičko oko pa bi se Manduševac mogao obraditi i kao zasebna, matematička tema. Jer tu je toliko zanimljivih geometrijskih elemenata. Prije svega, sam je pravilni osmerokut pogodan

Pravilni osmerokut



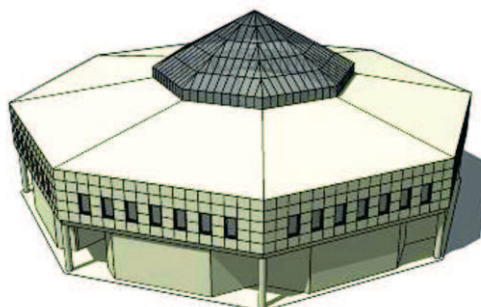
Pravilni osmerokut je mnogokut s osam sukladnih stranica kojemu su svi unutarnji kutovi sukladni. Kao kod svih pravilnih mnogokuta, tako i kod pravilnog osmerokuta za njegovo izučavanje izdvaja se *karakterističan trokut*. To je jednakokračan trokut ΔABS kojemu su vrhovi dva susjedna vrha pravilnog mnogokuta i središte mnogokuta opisane odnosno upisane kružnice. Primijetimo da je kut trokuta pri vrhu S karakterističnog trokuta ABS pravilnog n -terokuta jednak $360^\circ : n$. Dakle, za osmerokut on iznosi $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Ovu činjenicu možemo iskoristiti pri konstrukciji pravilnog osmerokuta upisanog danoj kružnici.

kao uvod u širu obradu pravilnih mnogokuta pa bi upravo ovaj s Manduševca mogao poslužiti kao motivacijski primjer.

Šetnja Zagrebom uvjerit će nas u široku zastupljenost pravilnog osmerokuta na gradskim ulicama i trgovima pa se čini kako je taj lik vrlo čest u djelima mnogih graditelja. No dojam je da je riječ o omiljenoj formi od davnina i zatječemo je na mnogim djelima koja su diljem svijeta nastajala kroz tisućljeća. Prelijep je primjer *Castel del Monte*, dvorac u južnoj Italiji s osmerokutnom jezgrom pri čijim je vrhovima osam osmerostranih kula. Čuveni su i osmerostrana *Bazilika San Vitale* u Ravenni, zatim *Hram nad stijenom* u Jeruzalemu čija je osmerostrana osnova nadsvođena zlatnom kupolom. Fotografije možete pogledati u *Panoptikumu*.

U Zagrebu susrećemo dva oktogona, jedan u samom Donjem gradu, tek nekoliko koraka od Trga bana Jelačića, drugi s južne obale Save, u Novom Zagrebu u naselju Dugave. **Oktogon** u središtu grada zgrada je nekadašnje *Prve hrvatske štedionice* koja je građena od 1898. do 1900. godine. Kroz tu monumentalnu građevinu od ulaza u Ilici do izlaza na Preradovićevu ili, kako mu Zagrepčani ponekad tepaju, *Cvjetnom trgu* vodi natkriven prolaz s raznovrsnim lokalima. Graditelj Josip pl. Vancaš (1859. – 1932.) u svoj projekt unio je iskustva tadašnje europske graditeljske mode u kojoj su pasaži bili vrlo omiljeni. Natkrivena i lijepo popločena uličica vodi nas do malog trga u središtu zgrade gdje se lomi i nastavlja svoj put k izlazu. Mali trg nadsvođen je prekrasnom kupolom čija rešetkasta struktura vitraja, u koju je ugrađena sva sila obojenih stakalaca, dopušta prodor dnevnog svjetla u unutrašnjost trga. Kupola je obnovljena 2003. godine. Upravo po toj osmerostranoj dvorani – trgu čitava je građevina dobila naziv pod kojim ga znadu građani – **Oktogon**.

Drugi je oktogon u prekosavskom Novom Zagrebu, u naselju Dugave. Premda manje poznat i manje atraktivan od prvoga, omiljeno je sastajalište građana iz okolnih novih naselja. To je zapravo mali trgovački i obrtnički centar s "kafićima" koji su omiljeni stanovnicima kvarta.





Na pravilne osmerokute možemo naići na još mnogo mjesta u Zagrebu od kojih bi neka ne spomenuti bio pravi grijeh. Jedno od takvih mjesta je Zrinjevac u kojem se smjestio prelijep osmerostrani glazbeni paviljon. Poklon je to gradu trgovca Eduarda Pristera iz 1891. godine.

Na paviljonu se izvodila popularna glazba, a povremeno se i danas oko njega odvijaju razne priredbe. Zrinjevac je tada (kraj 19. i početak 20. st.) bio središte društvenog života u Zagrebu, tu je bio "korzo", tu su bile najpopularnije kavanе. Zagrebačka se "špica" poslije preselila na Trg bana Jelačića da bi u novije doba zauzela prostor na početku Gajevе i u Bogovićevoj ulici pa sve do Cvjetnog trga. Na klupama Zrinjevca danas se odmaraju umorni šetači ili guguču zaljubljeni *taubeki*.



Uputimo li se Dežmanovim prolazom (*Prolaz Tuškanac*) pa kroz gustu šumu, doći ćemo u park Tuškanac. Do istog parka možemo doći i s Britanskog trga pa Rokovim perivojem i Ulicom Ivana Gorana Kovačića. Tu se ispred drvenog paviljona smjestio brončani spomenik pjesniku Vladimiru Nazoru, djelo kipara Stjepana Gračana. Spomenik je ovdje od 1972. godine kada je postavljen u prigodi obilježavanja 30. godišnjice Nazorova odlaska u partizane.

Drveni paviljon s osmerokutnim krovom dospio je ovamo nakon što je 1891. poslužio kao glazbeni paviljon u prigodi održavanja gospodarsko-šumarske izložbe na nekadašnjem Sveučilišnom, a danas Trgu maršala Tita. Paviljon je izrađen od hrastovine i lijep je primjerak vrtne arhitekture toga vremena.



Iz ove priče o osmerokutima ne možemo ispustiti niti suncobrane sa zagrebačkih gradskih tržnica. Oblikovani su prema tradicionalnim kišobranima iz podsljemenskog sela Šestine. Preljepe šare u kojima je naglašena jarka crvena boja osnovni su element tradicijskih predmeta ovog kraja. Danas su Šestine gotovo dio Zagreba, dapače za stanovanje vrlo poželjan gradski kvart. Na slici vidimo osmerokutne suncobrane na zagrebačkoj tržnici *Kvatrić*, novoj tržnici koja je prije nekoliko godina nastala preseljenjem stare s Kvaternikova trga.

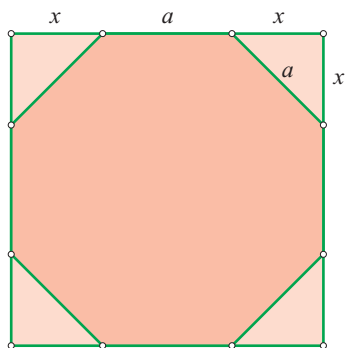
Dodajmo kako su tržnice na otvorenom stara zagrebačka tradicija. Danas najpoznatiji i najpopularniji Dolac otvoren je 1930. godine, a na odabir lokacije

utjecao je poznati gradski arhitekt Viktor Kovačić koji je na tom području sudjelovao u regulaciji potoka Medveščak. Tržnica na Dolcu zamijenila je dotadašnju tržnicu Harmica na glavnom gradskom trgu.

I kad smo već pomislili završiti priču o osmerokutu, prisjetili smo se još jednoga s trga ispred zagrebačke prvostolnice. Obrub je to fontane iz čijeg se središta uzdiže *Marijin stup* s Majkom Božjom na vrhu i s četiri manja stupa na kojima su smješteni anđeli. Ovaj lijepi gradski ures, prvotno nazvan *Madona s četiri anđela*, potječe iz 1865. godine. Stup s pozlaćenim brončanim figurama djelo je Antona Dominika Fernkorna (1813.–1878.), austrijskog kipara koji je između ostalog izradio spomenik banu Josipu Jelačiću (1866.) na glavnom gradskom trgu te kip *Sv. Juraj ubija zmaja* postavljen u Zagrebu 1867. Fontana je sazidana 1882., dvije godine nakon velikog potresa, a djelo je Hermana Bolléa.

U cijeloj ovoj priči o zagrebačkim osmerokutima valja ugraditi i geometrijski sadržajniju obradu pravilnog osmerokuta, pa možda i šire – pravilnih mnogokuta. Evo primjerice nekoliko zadataka koje pritom možemo rješavati.

Zadatak 1. Ako je zadana duljina a stranice pravilnog osmerokuta, izračunajmo duljine polumjera upisane mu i opisane kružnice.

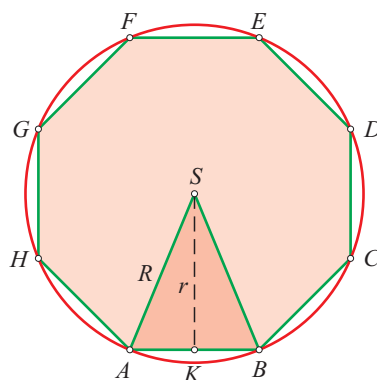


Dopunimo osmerokut do kvadrata. Duljine kateta sukladnih jednakokranih pravokutnih trokuta pri vrhovima kvadrata odredit ćemo Pitagorinim poučkom.

Kako je $x^2 + x^2 = 2x^2 = a^2$, svaka od tih kateta jednaka je $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Promjer $2r$ osmero-



kutu upisane kružnice jednak je stranici kvadrata, tj. $2r = 2x + a = a\sqrt{2} + a = (1 + \sqrt{2})a$. Stoga je traženi polumjer $r = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \cdot a$.



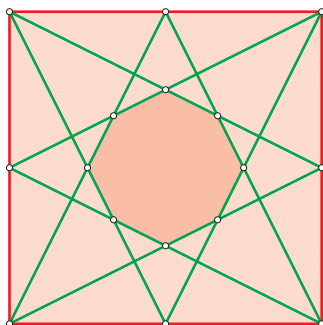
Drugi dio zadatka, određivanje duljine R polumjera opisane kružnice, riješit ćemo primjenom Pitagorina poučka na karakteristični trokut ABS :

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 a^2 + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(4 + 2\sqrt{2})a^2 \end{aligned}$$

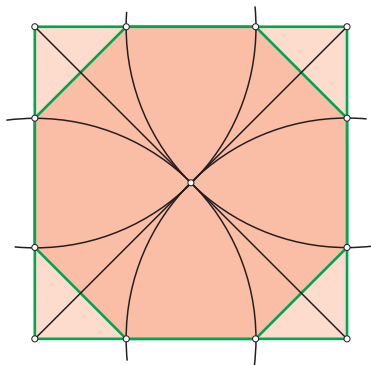
te je $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}a$.

Zadatak 2. Nacrtajte kvadrat i odredite polovišta njegovih stranica. Spojite vrhove kvadrata s tim

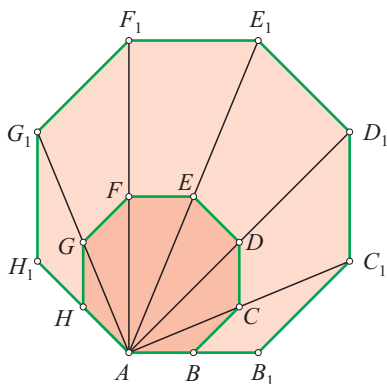
polovištima onako kako je to prikazano na sljedećoj slici. Te spojnice određuju pravilan osmerokut. Možete li obrazložiti ovu tvrdnju?



Zadatak 3. Sličica prikazuje još jednu jednostavnu konstrukciju pravilnog osmerokuta. Proučite je i obrazložite.



Zadatak 4. Ako je zadatak konstruirati pravilni osmerokut sa stranicom zadane duljine ili pak upi-



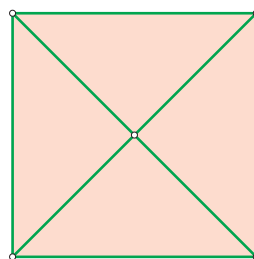
san ili opisan danoj kružnici, onda je dovoljno poznavanje bilo koje konstrukcije bilo kojeg pravilnog osmerokuta. Problem tada možemo riješiti koristeći se **homotetijom**. Pa recimo da smo konstruirali neki osmerokut $ABCDEFGH$, a zadatak je konstruirati pravilni osmerokut s duljinom stranice a . Produžimo stranicu $\overline{AB}$ do točke B_1 tako da bude $|AB_1| = a$.

Provedite konstrukciju do kraja.

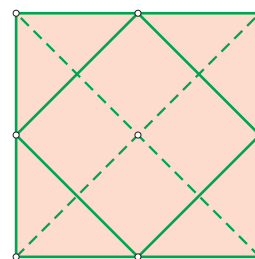
Zadatak 5. Površina pravilnog osmerokuta kojem je duljina stranice jednaka a iznosi $P = 2(1 + \sqrt{2})a^2$. Uvjerite se u točnost te formule.

Zadatak 6. Završimo našu priču s origamijem.

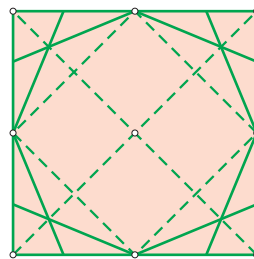
Uzmimo komad papira i izrežimo kvadrat. Presavijanjem kvadrata oko njegovih dijagonala odredimo njihovo sjecište, središte kvadrata (slika (1)). Vrhove kvadrata spojimo s njegovim središtem i tako dobijemo mali kvadrat upisan velikom s vrhovima u polovištima stranica velikog kvadrata (slika (2)). Odredimo simetrale šiljastih kutova pravokutnih trokuta i njihova su sjecišta četiri vrha pravilnog osmerokuta (slika (4)). Još četiri vrha su polovišta stranica velikog kvadrata.



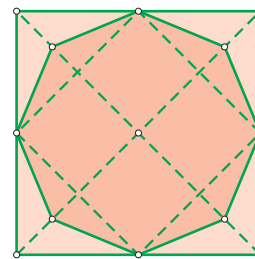
(1)



(2)



(3)



(4)

Steven G. Krantz: *Mathematical Apocrypha*

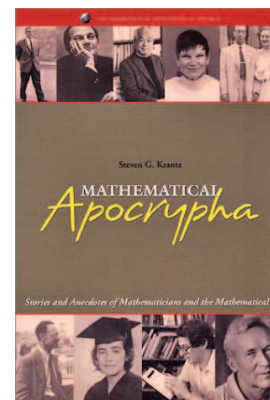
Evolucija nastave matematike u proteklih 30 godina, uvođenjem "nove matematike", pa "još novije matematike", tema je koja zaokuplja široku pažnju i često biva ismijavana. Promjene koje, u duhu promjena socijalnih prilika, doživljava jedan konkretan matematički zadatak dovedene su često do apsurd. Evo jednog takvog primjera.

• **šezdesete:** Seljak prodaje vreću krumpira za 10 dolara. Njegovi troškovi iznose $\frac{4}{5}$ od prodajne cijene. Kolika je njegova zarada?

• **sedamdesete:** Seljak prodaje vreću krumpira za 10 dolara. Njegovi troškovi iznose $\frac{4}{5}$ od prodajne cijene, odnosno 8 dolara. Kolika je njegova zarada?

• **sedamdesete (nova matematika):** Seljak mijenja skup P krumpira za skup M novaca. Kardinalni broj skupa M jednak je 10, a svaki element iz M vrijedi 1 dolar. Nacrtaj 10 velikih točaka koje prikazuju elemente od M . Skup troškova C sadržava dvije točke manje od skupa M . Prikaži C kao podskup od M i odgovori na pitanje: koji je kardinalni broj skupa koji predstavlja zaradu? (Prikaži ga crvenom bojom.)

• **osamdesete:** Seljak prodaje vreću krumpira za 10 dolara. Njegovi troškovi iznose 8 dolara, a zarada 2 dolara. Podcrtaj riječ "krumpiri" i raspravi s kolegama u razredu.



• **devedesete:** Kaptalistička svinja nepravedno zaraduje dva dolara po vreći krumpira. Analiziraj ovaj tekst! i patraži pograške, u pisanju, sadržaju gratamici i inetrpukciji te iskaži tvoj pogled na takav način bogaćenja?

Steven G. Krantz doktorirao je na *Princeton University*. Bio je profesor na nekoliko uglednih sveučilišta u SAD-u, a sada je voditelj katedre za matematiku na *Washington University* u St. Louisu. Autor je brojnih, vrlo čitanih knjiga te dobitnik nekoliko uglednih nagrada. *Mathematical Apocrypha* je knjiga o matematici i matematičarima, zapravo zbirka zapisa koji su dobrim dijelom njegovo osobno iskustvo koje iznosi u formi duhovitih priča i anegdota te prilaže niz zanimljivih fotografija. U knjizi se spominju Paul Erdős, Michael Atiyah, George Pólya, Paul Halmos, Andrew Wiles i mnogi drugi veliki matematičari.

KAKO SE MIJENJAJU UPUTE U ISPITIMA

1995.: Odgovori na sva pitanja.
 2000.: Odgovori na svako peto pitanje.
 2005.: Odaberi točan odgovor (A, B ili C).
 2010.: Napiši A ili B.
 2015.: Molimo, samo pročitaj pitanja!
 2020.: Hvala što si došao/došla!!!

promijenimo sve!

