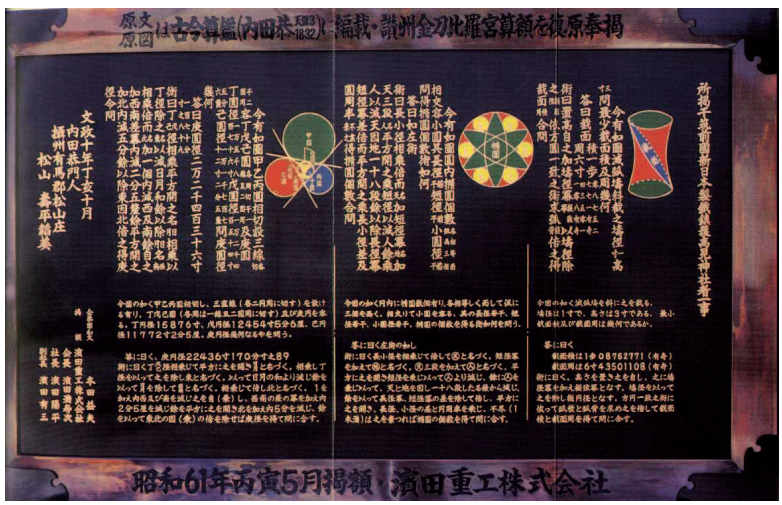
Sangaku problemi
geometrijski problemi u japanskim hramovima – 1. dio



Prefektura Fukuoka, svetište Takami: drvena ploča na kojoj su postavljena tri problema kao svojevrstan izazov promatraču: Riješi ovo ako možeš!

Milan Kabić, Zagreb

Možete li zamisliti matematičara koji je dokazao teorem ili riješio neki problem, onda ga zapisao na za to pripremljenu glatku drvenu ploču, ukrasivši tekst lijepim crtežom, zatim tu ploču odnio u crkvu ili samostan i tamo je objesio i učvrstio na dobro vidljivo mjesto?

Riječ *sangaku*, nastala kao složenica od *san* = račun, izračun ili aritmetika i *gaku* = znanost ili učenje, u doslovnom prijevodu znači *matematička ploča*.

Sangaku problemi matematički su problemi koje su japanski matematičari i obični amateri ispisivali na posebnim, lijepo ukrašenim drvenim pločama, koje su postavljali pod krovišta u šintoističkim svetištima i budističkim hramovima.

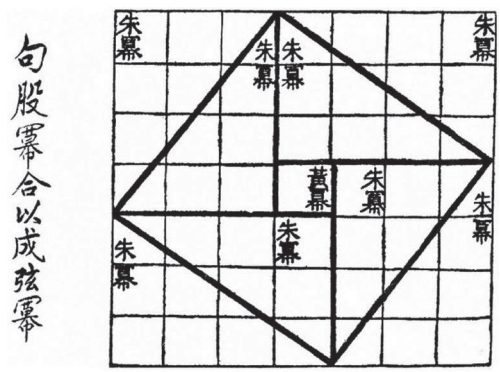
Povijesna crtica

Sangaku tradicija trajala je oko 250 godina tijekom Edo razdoblja (1603.–1867.), za vrijeme šogunata *Tokugawa*, koje je bilo karakterizirano potpunom, samonametnutom izolacijom od utjecaja zapadne civilizacije.

Vratimo se na trenutak u dalju prošlost. O japanskoj matematici prije 7. stoljeća malo se zna. U 7. stoljeću uz budizam iz Kine u Japan stižu i prvi matematički spisi o računanju, algebri i geometriji.

Prefektura Fukushima: sangaku ploče izložene na istaknutim, dobro vidljivim mjestima, ispod krovišta u šintoističkim svetištima i budističkim hramovima

Najveći utjecaj na japansku matematiku tog vremena imao je jedan od najstarijih i najpoznatijih kineskih matematičkih tekstova pod nazivom **Chou Pei Suan Ching**, u prijevodu **Aritmetički klasici**, nastao između *500. g. pr. Kr.* i *300. g. pr. Kr.* Riječ je o zbirci od 256 riješenih problema. U njoj se nalazi prvi dokaz bez riječi Pitagorina poučka.



Gougu teorem: vizualni, geometrijski dokaz Pitagorina poučka za slučaj $a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$

Unatoč bogatstvu matematičkih znanja uvezenih iz Kine, matematika nije u ranom srednjem vijeku uhvatila dubljeg korijena u Japanu. Nakon početnog razvoja došlo je do stagnacije matematičke misli. Tijekom šogunata Ashikage (1338.–1573.) zemlju su pustošili ratni sukobi između klanova koji su se borili za prevlast. To se razdoblje često spominje kao mračno doba znanosti Japana. Prema riječima jednog povjesničara matematike, jedva da se mogla naći u Japanu osoba koja je znala dijeliti brojeve.

Nakon velike pobjede što ju je 1600. godine izvojevao *Tokugawa Ieyasu* porazivši suparnika Hideyorija, zemlja je ujedinjena. Car je 1603. godine proglasio Tokugawu šogunom koji je za svoje sjedište odabrao mali ribarski provincijski gradić Edo, današnji Tokio.

Time službeno počinje razdoblje Edo ("Yedo") pod šogunatom Tokugawe, koje karakterizira mir i samonametnuta izolacija u trajanju od dva i pol stoljeća.

Srebrni listovi lopoča:
tragovi mjesečeva
posjeta jezeru.
Vladimir Devidé

Sunce doziva maglu.
Ona se penje stepenicama hrama,
uz lukove i odlazi kući.
Na okviru vrata i pod
strehom drvene ploče.
Matsuo Basho

Proljeće odlazi
oklijevajući u
kasnom cvijetu trešnje.
Yosa Buson

Panoramski pogled na Edo (današnji Tokio) iz 17. stoljeća

U drugoj polovici 16. stoljeća u Japan stižu najprije Portugalci, pa Španjolci, a početkom 17. stoljeća i Nizozemci. Njihovi trgovci i diplomati, u međusobnom nadmetanju, pokušavaju učvrstiti svoj položaj u Japanu kako bi povećali trgovinsku razmjenu s njim, a misionari iz tih država istovremeno pokušavaju što više Japanaca prevesti na kršćanstvo. Kako su u Japanu dominantne religije budizam i šintoizam, takvo djelovanje misionara izazvalo je žestoke reakcije. Da bi umirio narod, šogun *Tokugawa Iemitsu* izdaje 1633. edikt kojim se zabranjuje djelovanje misionara, ukida kršćanstvo, naređuje rušenje svih kršćanskih crkava i zahtijeva da svi stranci napuste Japan. Već od 1641. godine praktički više nema stranaca u Japanu. Samo je jednoj maloj skupini nizozemskih trgovaca, članova kompanije *East India Company*, bio dopušten boravak i to na malom umjetnom otoku Deshima dimenzija 200 m × 70 m u jednom dijelu luke grada Nagasakija.

Umjetni otok Deshima dimenzija 200 m × 70 m u jednom dijelu luke u Nagasakiju

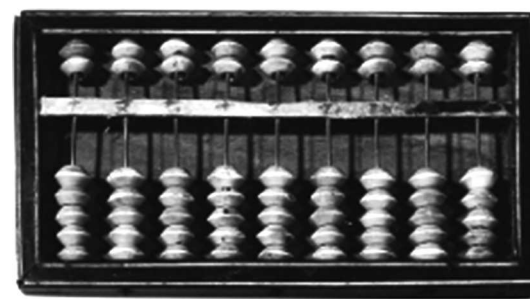
Jednom godišnje samo jedan nizozemski brod mogao je pristati na taj otočić. Stranci nisu mogli ulaziti u Japan, a Japanci nisu smjeli napuštati svoju zemlju. Kršenje tih odredbi kažnjavalo se smrću. Ovim je započelo novo razdoblje japanske povijesti nazvano *Sakoku* – zatvorena zemlja. Svaka je razmjena materijalnih dobara, kulture i svih informacija između Japana i ostatka svijeta stala. Japan je u svakom pogledu postao izolirani otok. Osim negativnih posljedica izolacije, začudo, javile su se i pozitivne. Dolazi do svojevrsne renesanse – razdoblja *Genroku*, snažnog razvoja vlastite autohtone umjetnosti i znanosti. To vrijedi i za matematiku. Kako u ovom razdoblju mira za samuraje nije bilo posla, mnogi od njih osnovali su svoje male škole, poznate kao *juku*. Uz borilačke vještine i filozofiju, glavni predmeti u tim školama su: čitanje, pisanje i matematika.

Yōken juku u kojoj je samuraj matematičar Sakuma Yōken (1819.–1896.) tijekom pola stoljeća podučavao 2144 učenika.

Učenici su bili najčešće djeca samuraja, a poslije obrtnika i trgovaca. Pred kraj Edo razdoblja u Japanu je bilo preko 80 000 *juku*. Od zaostale, feudalne, rascjepkane i ratovima iscrpljene zemlje, s gotovo cjelokupnom nepismenom populacijom, Japan je u dvjestotinjak godina uspio provesti masovno opismenjavanje kakvo nije do tada bilo poznato na Zapadu. Najvjerojatnije sangaku tradicija vuče korijene iz *juku*, a autori sangaku problema su učitelji koji su radili u njima te njihovi talentirani učenici.

Tradicionalni juku: učitelj i učenici, individualni oblik rada i rad u paru

Jinkoki, treće izdanje iz 1641. godine



Najstariji poznati abakus, ili soroban, u Japanu. Potječe iz 1592. godine.

Seki Kōwa, najveći matematičar razdoblja Edo

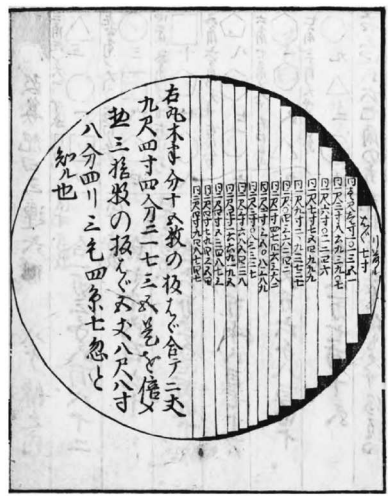
Unatoč tome što su zapadnjačka matematička znanja za Japance tog vremena bila potpuno nepoznata, začuđuje bogatstvo stvaralaštva japanskih geometričara onog vremena. Iz sadržaja sangaku ploča vidi se da su Japanci poznavali neke geometrijske stavke puno prije nego što su oni otkriveni na Zapadu.

Riječ 和 = *Wasan*, nastala kao složenica od *wa* = japanski i *san* = račun, izračun ili aritmetika, u doslovnom prijevodu znači japanski račun ili japanska aritmetika. Međutim uobičajen prijevod te riječi je japanska matematika. Označuje matematiku koja je nastala u Japanu tijekom Edo razdoblja, dok riječ 洋算 = Yōsan označuje zapadnjačku matematiku.

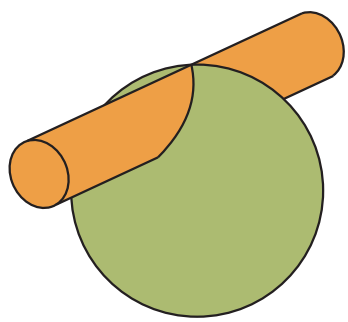
Kao početak nastanka *Wasan* uzima se 1627. godina kada je Koyo Yoshido objavio knjigu *Jinkoki* (*Mali i veliki brojevi*), djelo koje postaje sinonim za aritmetiku u cijelom Japanu.

Ta je knjiga doživjela preko 300 izdanja. U njoj je Yosido dao niz praktičnih primjera iz svakodnevnog života koji su služili kao vježba za učenje računanja na sorobanu, japanskoj inačici kineskog abakusa. Najpoznatiji matematičar Edo razdoblja je **Seki Takakazu** ili **Seki Kōwa** (oko 1640.–1708. g.). O njegovu životu malo se zna. Drugi je sin samuraja Nagaakire Uchiyame. Iz nepoznatih razloga u ranoj ga dobi usvaja samuraj Seki Gorōzaemona, čije je prezime preuzeo.

O njegovu djelu se također malo zna. Povjesničari matematike navode da je samo dio njegovih radova otkriven iz spisa njegovih učenika. No to što je



Sekijev Enri, računanje površine kruga



Mnogi tvorci sangaku primjenjivali su Sekijev Enri: cilindar dira sferu iznutra; izračunaj površinu cilindrične plohe koja se nalazi unutar sfere.

otkriveno, vrijedno je divljenja. Razvio je teoriju determinanti općenitiju i desetak godina prije Leibnitza, primjenjivao *Cramerovo pravilo* pola stoljeća prije Cramera te otkrio Bernoullijeve brojeve prije Jacoba Bernoullija. Godine 1685. riješio je kubnu jednadžbu $x^3 - 5x^2 - 14x - 30 = 0$ metodom koju otkriva Horner sto godina poslije. Rješava razne vrste diofantskih jednadžbi. Japanski matematičari misle da je najvažnije njegovo otkriće **Enri**, "Yenri" – princip kruga. Ta je metoda u početku korištena za računanje površine kruga, slična Eudoksovoj metodi ekshaustije razvijenoj još u drevnoj Grčkoj. Poslije je tu metodu Seki poopćio i primjenjivao za računanje površina likova omeđenih raznim krivuljama. U biti je riječ o određenom integralu koji su na Zapadu otkrili nešto kasnije njegovi suvremenici Newton i Leibniz.

Zašto su sangaku ploče postavljane pod krovišta svetišta i hramova?

Postoji više objašnjenja.

U Japanu su u to vrijeme dominantne dvije religije. Jedna je budizam, uvezen u 7. stoljeću iz Kine. Druga je izvorni japanski šinto u prijevodu "put bogova" ili popularno šintoizam. Šintoizam se razvio iz jednog od mnogih kultova Sunca. U njemu ima oko 800 božanstava koji se ujedinjuju u božici Kami, koja po njihovim vjerovanjima voli konje te su mnogi Japanci šintoističkim svetištima poklanjali konje. Oni koji to nisu mogli, jer im je konj trebao da bi preživjeli ili ga jednostavno nisu imali, naslikali bi na drvenoj ploči konja pa bi tu ploču kao zavjetni dar ili kao zahvalu bogovima poklonili jednom od mnogobrojnih šintoističkih svetišta, tako što bi je pričvrstili ispod strehe svetišta.

Molitva božici Kami

Jedni tvrde da su sangaku zapravo zavjetne ploče koje su Japanci darivali šintoističkim svetištima i budističkim hramovima motivirani pobožnošću ili molitvom da se izbave iz nekakve nevolje ili jednostavno kao znak zahvalnosti. U to je vrijeme bilo mnogo privatnih škola i ne bi bilo čudno da su učitelji, kad bi pripadnici njihove škole riješili neki problem, osjećali potrebu da na određeni način zahvale bogovima na važnom matematičkom otkriću. Jedna sangaku ploča obješena 1815. godine ima predgovor u kojem učitelj i njegovi učenici

Prefektura Nagano, svetište Takemizuwake (dimenzije ploče $4.5\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$). Autori sangaku problema njegovali su estetsku komponentu prikaza geometrijskih konfiguracija, tako da su mnoge ploče prava umjetnička remek-djela koja plijene pažnju promatrača.

predstavljaju svoj rad. On glasi: "U ovom svetištu mi molimo Boga za napredak naših matematičkih sposobnosti i u tu svrhu zavjetujemo ovaj sangaku."

Drugi nalaze razlog u činjenici što u to vrijeme nije bilo sveučilišta u Japanu. Šintoistička svetišta i budistički hramovi bili su središta znanja.

Na početku su autori sangaku problema pisali na kanbunu, starokineskom jeziku. Kanbun je u Japanu bio sličan latinskom jeziku na Zapadu. Znali su ga i njime se koristili samo visokoobrazovani ljudi. Ta činjenica ide u prilog tvrdnji da su autori sangaku, naročito početkom Edo razdoblja, samuraji ili pak učitelji koji su podučavali matematiku, zajedno sa svojim učenicima.

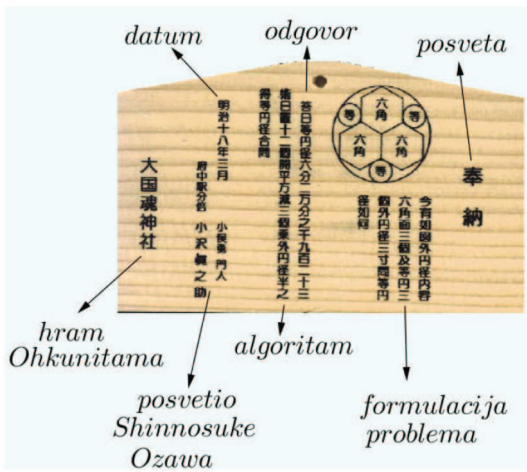
Riječ je o kulturnom fenomenu, nepoznatom u ostalom dijelu svijeta. Sangaku su svakako važan dio svjetske kulturne baštine. Te su ploče jedinstvene kreacije jer su istovremeno umjetnička djela, sakralni predmeti i sačuvani zapisi o originalnim matematičkim dostignućima određenog razdoblja jedne, od svjetskih utjecaja izolirane, kulture. Estetska tradicija koja ih je stvarala kroz četvrt tisućljeća, i koja ih stvara i danas nekoliko stotina godina poslije, sjaji u umjetničkim prikazima, laiku teško uhvatljivih, apstraktnih sadržaja. Impresionira i svakog matematičara veseli činjenica da su umjetnički prikazi matematičke apstraktne ljepote izloženi mogućnosti kontemplacije u okrilju sakralnih objekata, dok su druge kulture unutar hramova i bogomolja prikazivale sadržaje religijskog karaktera u obliku ikona, fresaka, mozaika i vitraja.

Sangaku tradicija originalna je i u svijetu jedinstvena popularizacija matematike. Prikazivanjem matematičkih sadržaja širokim masama na lijepo oslikanim i tajanstvenim drvenim pločama, istaknutim na mjestima bogoštovlja i masovnih okupljanja, matematika je dobila uporište u japanskoj kulturi. Nažalost, to nije dugo trajalo. U dvadesetom stoljeću sangaku tradicija potpuno je zaboravljena. Procjenjuje se da je tijekom Edo razdoblja napravljeno oko 5000 ploča. To znači da se tijekom 250 godina proizvodilo prosječno 20 ploča godišnje. Do danas je sačuvano oko 920 sangaku ploča čije su dimenzije u početku iznosile između $0.5\,\mathrm{m} \times 0.3\,\mathrm{m}$ i $2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$. Poslije su dimenzije povećavane.

Iz zaborava je sangaku vratio srednjoškolski nastavnik Hidetoshi Fukagawa. Shvativši njihovu važnost, počeo je proučavati fenomen sangaku. Obilazio je svetišta i hramove po cijelom Japanu kako bi otkrio i sačuvao sve postojeće ploče. Tim je radom stekao doktorat iz povijesti matematike.

Što je sadržaj sangaku problema?

Na sangaku pločama nema dokaza stavaka, već samo njihova formulacija ili formulacija problema koji je trebalo riješiti. Autori su posebnu pažnju posvećivali vizualnom dojmu upotrebljavajući raznovrsne boje te vodeći računa o kompoziciji i rasporedu prikazanih likova.

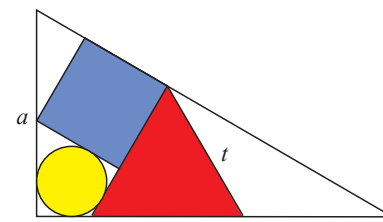


Sangaku problemi uglavnom obuhvaćaju sadržaje euklidske geometrije. Neobični su i, nažalost, ne mogu se naći u današnjim nastavnim sadržajima. Neki su prilično jednostavni i lako se riješe. Ima i takvih koje je gotovo nemoguće riješiti ako se ne primijene moderne matematičke metode. Daniel Pedoe, poznati engleski matematičar, koautor prve knjige o sangaku izdane izvan Japana, navodi da je uzrok složenosti i težini nekih sangaku problema za zapadnjake činjenica da su japanski matematičari elipsu definirali kao presjek valjka i ravnine. Krugovi i elipse igraju znatno istaknutiju ulogu nego u zapadnoj matematici. Evo samo dijela sadržaja koje obuhvaćaju sangaku problemi.

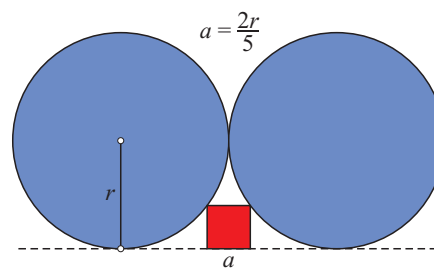
Teorija brojeva: kineski teorem o ostacima, Pitagorine trojke i Heronovi brojevi, linearne diofantske jednadžbe, diofantske jednadžbe drugog i trećeg stupnja.

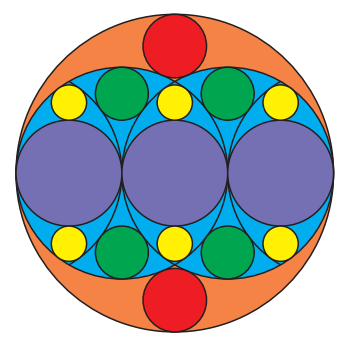
Numerička analiza: Bernoullijevi brojevi, Wallisova formula, Hornerova metoda, Newtonova metoda aproksimacija, determinante.

Geometrija višekuta: trokuti, pravokutni trokut, kvadrati, pravokutnici i četverokuti, trokuti i kvadrati, teorem o šest segmenata ili na japanskom *rokusyajutu*.

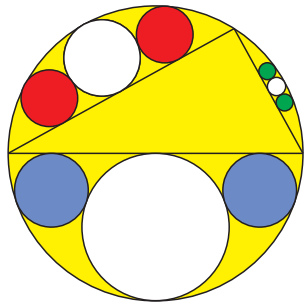


Kružnice: dvije kružnice, tri kružnice, četiri kružnice, ..., devet kružnica, deset kružnica, proizvoljno mnogo kružnica, tetive kružnica, Ajimin teorem, *Boushajutu*, Descartesov stavak o kružnicama, problemi rješivi inverzijom.

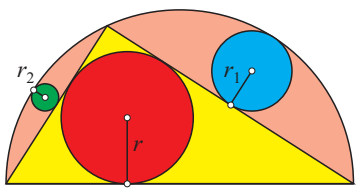




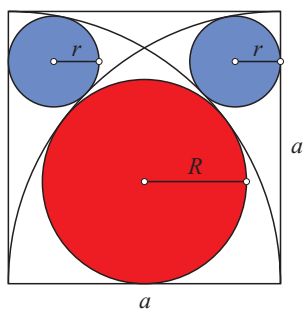
$r,\ \frac{2}{3}r,\ \frac{r}{3},\ \frac{r}{5},\ \frac{r}{6},\ \frac{r}{9}$



$r_3 = r_1 + r_2$



$r^2 = 8 r_1 r_2$



$R = \frac{3}{8}a \qquad r = \frac{1}{6}a$

Kružnica i trokut: kružnice i jednakostranični trokuti, kružnice i jednakokračni trokuti, kružnice i pravokutni trokuti, dvije kružnice i trokuti, tri kružnice i trokuti, četiri kružnice i trokuti, . . . , mnogo kružnica i trokuti, kružnice i kvadrati, mnogo kružnica i kvadrati (Caseyev stavak), kružnice i trapezi, kružnice i rombovi, kružnice i četverokuti, kružnice i višekuti, kružnice, kvadrati i trokuti, Ajimin drugi teorem.

Elipse: jedna elipsa, elipse i dodirne kružnice, više dodirnih kružnica i elipse, elipse i trokuti, kvadrati i elipse, pravokutnici i elipse, elipse i rombovi, mješoviti problemi o elipsi.

Geometrija tijela: kugle, presjeci kugli i drugih tijela, elipsoidi, presjeci elipsoida i drugih tijela, valjci, presjeci valjaka i drugih tijela, stošci itd.

Problemi maksimuma i minimuma: trokuti, kružnice, trokuti i kružnice, kvadrati i drugi višekuti, elipse.

Sangaku u nastavi matematike

Ovakvi su sadržaji dobrodošli u nastavi matematike jer plijene pažnju svojom neobičnošću, estetikom, elegancijom i nečim što je u genezi ljudskog bića, a to je potreba za ljepotom, igrom i istraživanjem. Mnogi autori koji pišu o sangaku problemima ističu važnost ovakvih sadržaja za nastavu matematike, koja je u velikoj mjeri zanemarila geometriju u korist moderne matematike. U nastavi je izuzetno važno njegovati estetsku komponentu matematike, a sangaku problemi za to su idealan nastavni materijal.

LITERATURA

1/ Hidetoshi Fukagawa i Dan Pedoe, *Japanese Temple Geometry Problems San Gaku*, Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canada, 1989.

2/ H. Fukagawa i J. F. Rigby, *Traditional Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries*, SCT Press, Singapore, 2002.

3/ Hidetoshi Fukagawa i Tony Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

4/ Vladimir Devidé, *Geometrijski problemi u japanskim hramovima*, Matematičko-fizički list god. XLV (1994.–1995.), br. 3 (179), str. 124–129.

5/ Karmela Milutinović, *Zadatci o elipsama iz japanskih hramova*, Matematičko-fizički list god. L (1999.–2000.), br. 3 (199), str. 145–152.

6/ Vladimir Devidé, *O knjizi "Tradicionalni japanski matematički problemi 18. i 19. stoljeća", autora Hidetoshija Fukagawe i Johna F. Rigbyja*, Matematičko-fizički list god. LIV (2003.–2004.), br. 1 (213), str. 9–13.