Nizovi

3. dio: Nizovi zadani rekurzijom

Anđelko Marić, Sinj

U prvom članku ovog teksta spomenuli smo da se niz, uz ostale načine, može zadati i **rekurzijom**. Isto smo tako napomenuli da je najprikladnije ako je niz (a_n) zadan eksplicitnom formulom za opći član, to jest formulom $a_n = a(n)$, $n \in \mathbf{N}$. Zato je logično postaviti teorijsko pitanje: Ako je niz zadan rekurzijom, može li se odatle odrediti formula za opći član niza? Kažimo odmah da to uvijek nije moguće, čak i u nekim jednostavnim slučajevima.

U ovom članku promatrat ćemo samo nizove (a_n) koji su zadani rekurzijom oblika:

$$a_{n+k} = A_0a_n + A_1a_{n+1} + A_2a_{n+2} + \ldots + A_{k-1}a_{n+k-1},$$

gdje su $A_0, A_1, \ldots, A_{n+k-1}$ zadani realni koeficijenti.

Da bi niz bio određen, moraju još biti zadani članovi niza: $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Izraz na desnoj strani zadane rekurzijske relacije, to jest izraz $\sum\limits_{i=0}^{k-1} A_ia_{n+i}$ zove se **linearna kombinacija** članova $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}$, zbog čega se ovakva rekurzija zove **linearna rekurzija duljine k**.

Primjeri takvih rekurzija su:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n; \quad a_1 = 1,\ a_2 = 4,$$

$$a_{n+4} = 5a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 13a_n;$$
$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 5,\ a_4 = 9,$$

$$a_{n+7} = 15a_{n+6} - a_{n+5} + 12a_{n+4} - 13a_{n+3} + a_{n+2} - 31a_{n+1} - 72a_n;$$
$$a_1 = 12,\ a_2 = -3,\ a_3 = 1,\ a_4 = 8,$$
$$a_5 = -6,\ a_6 = -1,\ a_7 = -3,$$

gdje su nizovi zadani linearnim rekurzijama duljina redom 2, 4 i 7.

Stavljajući u zadane relacije $n = 1$, možemo izravno izračunati nepoznati član niza koji slijedi neposredno iza posljednjeg od zadanih članova niza. Potom, za $n = 2$, dobije se član koji slijedi iza toga izračunanog. I tako redom, možemo izračunati po volji mnogo članova niza.

Pokažimo kako to izgleda na prvom od ovih triju zadanih nizova.

Ako u nizu

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n,$$

uz $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, uvrstimo $n = 1$, dobit ćemo $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1$, $a_3 = 10$.

Dalje je, za $n = 2$, $a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 4$, $a_4 = 22$.

Istim postupkom, za $n = 3$ dobijemo $a_5 = 46$, a za $n = 4$, $a_6 = 94$.

I tako redom, možemo izračunati bilo koji član niza.

Podsjetimo se, što smo već napomenuli, da ako bismo ovim postupkom htjeli odrediti neki član niza, trebamo prije toga odrediti sve prethodne članove tog niza. Naravno da je to za članove s velikim indeksima nepraktično.

Kažimo odmah da se za ovakve i slične nizove može, iz zadanih podataka, odrediti formula za opći član niza, to jest formula oblika $a_n = a(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Navedimo da je to za upravo promatrani niz formula $a_n = 3\cdot 2^{n-1} - 2$, što se za nađene članove lako provjeri.

Glavni je cilj ovog članka naći postupak određivanja općeg člana niza zadanog linearnom rekurzijom.

Ako u rekurzijskoj relaciji $a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} A_i a_{n+i}$ označimo $a_{n+k} = x^k$, dobijemo algebarsku jednadžbu k-tog stupnja

$$x^k = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{k-1},$$

jer je $A_0 a_n = A_0 x_{n+0} = A_0 x^0 = A_0$.

Sredimo li ovu jednadžbu po padajućim potencijama od x, dobijemo:

$$x^k - A_{n-1}x^{k-1} - A_{n-2}x^{n-2} - \ldots - A_2 x^2 - A_1 x - A_0 = 0.$$

Ova se jednadžba zove **diferencijska jednadžba** pripadne rekurzijske relacije.

Označimo li rješenja ove jednadžbe $x_1, x_2, \ldots, x_k$, tada opći član niza (a_n) glasi:

$$a_n = B_1 x_1^n + B_2 x_2^n + \ldots + B_n x_k^n,$$

gdje koeficijente $B_1, B_2, \ldots, B_k$ odredimo iz zadanih članova $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Dokažimo to za niz (a_n) zadan linearnom rekurzijskom relacijom duljine $k = 2$.

Označimo $a_{n+2} = pa_{n+1} - qa_n$, $pq \in \mathbf{R}$. Pripadna diferencijska jednadžba glasi $x^2 = px - q$, ili $x^2 - px + q = 0$.

Označimo li rješenja ove jednadžbe x_1 i x_2 prema Vièteovim formulama vrijedi $x_1 + x_2 = p$, $x_1 x_2 = q$.

Promatrajmo niz $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$; A, $B \in \mathbf{R}$ i izračunajmo vrijednost izraza $pa_{n+1} - qa_n$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&pa_{n+1} - qa_n = \\
&= p(Ax_1^{n+1} + Bx_2^{n+1}) - q(Ax_1^n + Bx_2^n) \\
&= Ax_1^n(px_1 - q) + Bx_2^n(px_2 - q) \\
&= Ax_1^n[(x_1+x_2)x_1 - x_1x_2] + Bx_2^n[(x_1+x_2)x_2 - x_1x_2] \\
&= Ax_1^n \cdot x_1^2 + Bx_2^n \cdot x_2^2 = Ax_1^{n+2} + Bx_2^{n+2} \\
&= a_{n+2}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da za niz $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ vrijedi relacija $a_{n+2} = pa_{n+1} - qa_n$, gdje je $x_1 + x_2 = p$, $x_1 x_2 = q$.

Time smo postavljenu tvrdnju dokazali za $k = 2$. Isto se tako, primjenom odgovarajućih Vièteovih formula za jednadžbe višeg stupnja, dokaže i za $k > 2$.

Primjer 1. Niz (a_n) zadan je rekurzijskom relacijom $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. Odredi formulu za opći član niza. (Ovo je zadatak u kojemu smo, pomoću rekurzije već odredili nekoliko nepoznatih početnih članova.)

Rješenje. Pripadna diferencijska jednadžba glasi:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Rješenja jednadžbe su $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Zato je opći član niza oblika $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$, $a_n = A + B \cdot 2^n$.

Za $n = 1$ imamo $A+2B=1$, a za $n = 2$, $A+4B=4$. Rješenje ovog sustava je $A = -2$, $B = \frac{3}{2}$. Zato je $a_n = -2 + \frac{3}{2} \cdot 2^n$, ili $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

Stavljajući za $n = 1, 2, \ldots, 6$, uz dva zadana, dobijemo još i daljnja četiri, već određena člana niza.

Isto tako vidimo da se može izravno odrediti bilo koji član niza, bez određivanja prethodnih članova.

Primjer 2. Niz (a_n) zadan je rekurzijskom formulom $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n$; $a_1 = 2$, $a_2 = 34$, $a_3 = 38$.

a) Odredi dva sljedeća člana niza.

b) Odredi opći član niza.

c) Pokaži da su rješenja pod a) i b) u suglasju.

Rješenje.

a) Za $n = 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
a_4 &= 3a_3 + 4a_2 - 12a_1 \\
&= 3 \cdot 38 + 4 \cdot 34 - 12 \cdot 2, \\
a_4 &= 226.
\end{aligned}$$

Za $n = 2$ imamo:

$$\begin{aligned} a_5 &= 3a_4 + 4a_3 - 12a_2 \\ &= 3 \cdot 226 + 4 \cdot 38 - 12 \cdot 34, \\ a_5 &= 422. \end{aligned}$$

b) Pripadna diferencijska jednadžba glasi

$$x^3 = 3x^2 + 4x - 12,$$

ili

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

Jednadžbu riješimo rastavljanjem na linearne faktore:

$$x^2(x-3) - 4(x-3) = 0,$$
$$(x-3)(x-2)(x+2) = 0.$$

Odavde je $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Zato je opći član niza oblika:

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n + C \cdot (-2)^n.$$

Uvrstimo li u ovu jednadžbu za n redom vrijednosti 1, 2 i 3, dobije se:

$$\begin{aligned} 3A + 2B - 2C &= 2, \\ 9A + 4B + 4C &= 34, \\ 27A + 8B - 8C &= 38. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$. Opći član niza glasi:

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 2^n + 3 \cdot (-2)^n.$$

c) Treba pomoću ove formule provjeriti izračunane vrijednosti za a_4 i a_5.

$$a_4 = 2 \cdot 3^4 + 2^4 + 3 \cdot (-2)^4, \; a_4 = 226.$$

$$a_5 = 2 \cdot 3^5 + 2^5 + 3 \cdot (-2)^5, \; a_5 = 422.$$

Vidimo da se rješenja podudaraju s već nađenim rješenjima.

* * *

Vidjeli smo da se određivanje formule za opći član niza zadanog linearnom rekurzijom duljine k svodi na rješavanje algebarske jednadžbe stupnja k.

Znamo da takva jednadžba za $k > 4$ nije općenito rješiva, zbog čega se, u tom slučaju, ne može općenito odrediti ni opći član niza.

Ovdje se može pojaviti još jedan problem.

Ako su svi koeficijenti zadane rekurzijske relacije realni i ako su zadani početni članovi realni, onda su svi članovi niza također realni, a time je i $a_n = a(n)$, $n \in \mathbf{N}$ realna funkcija od n.

Međutim, algebarska jednadžba s realnim koeficijentima može imati i kompleksna rješenja, što znači da je $a_n = a(n)$ kompleksna funkcija od n.

Pokazat ćemo da je ovo proturječje samo prividno, to jest da su članovi niza i u slučaju kompleksnih rješenja pripadne diferencijske jednadžbe također realni.

Kompleksna rješenja algebarske jednadžbe s realnim koeficijentima pojavljuju se uvijek u parovima konjugirano-kompleksnih brojeva.

Neka su x_1 i x_2 par kompleksnih rješenja pripadne diferencijske jednadžbe, to jest $x_2 = \overline{x_1}$. U formuli za opći član niza pojavljuje se izraz:

$$Cx_1^n + Dx_2^n = Cx_1^n + D\overline{x_1}^n; \quad C, D \in \mathbf{R}.$$

Napišemo li ta dva broja u trigonometrijskom obliku, tada je

$$x_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$x_2 = \overline{x_1} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Prema prvoj Moivreovoj formuli vrijedi

$$x_1^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\overline{x_1}^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

Odavde je:

$$\begin{aligned} &Cx_1^n + D\overline{x_1}^n = \\ &= Cr^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + Dr^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) \\ &= (C+D)r^n\cos n\varphi + (C-D)r^n\sin n\varphi. \end{aligned}$$

Budući da je $r^n \cos n\varphi = \mathrm{Re}\, x_1^n$ i $r^n \sin n\varphi = \mathrm{Im}\, \overline{x_1}^n$, to je uz oznake $C + D = A$ i $C - D = B$,

$$x_1^n + D\overline{x_1}^n = A \cdot \mathrm{Re}\, x_1^n + B \cdot \mathrm{Im}\, x_1^n$$

Ovaj posljednji izraz realan je za svaki kompleksan broj x_1. Time je problem riješen općenito.

Pokažimo to na jednom primjeru.

Primjer 3. Niz (a_n) zadan je rekurzijskom relacijom $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

a) Odredi daljnjih šest članova niza.
b) Odredi opći član niza.
c) Pokaži da je niz periodni.

Rješenje.

a) Izravnom primjenom zadane relacije, dobijemo:

$$a_3 = a_2 - a_1 = 1,\ a_4 = a_3 - a_2 = -1,$$
$$a_5 = -2,\ a_6 = -1,\ a_7 = 1,\ a_8 = 2, \ldots$$

b) Pripadna diferencijska jednadžba glasi

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Rješenja jednadžbe su:

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Rješenja su kompleksni brojevi i postupamo na opisani način. Jedno rješenje pišemo ovako:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}.$$

(Za x_1 mogli smo uzeti i drugo rješenje i dobili bismo isti niz.) Dalje je:

$$\mathrm{Re}\, x_1^n = r^n \cos n\varphi = 1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3},$$

$$\mathrm{Im}\, \overline{x_1}^n = r^n \sin n\varphi = 1 \cdot \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Konačno dobijemo:

$$a_n = A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Koeficijente A i B odredimo na uobičajen način, to jest uvrštavanjem u dobivenu formulu $n = 1$ i $n = 2$, što daje: $\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 1$, $-\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 2$. Rješenje ovog sustava je $A = -1$, $B = \sqrt{3}$. Konačno je:

$$a_n = -\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3},$$

ili

$$a_n = \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}.$$

Lako se provjeri da se članovi niza izračunani ovom formulom podudaraju s članovima izračunanim u a).

c) Formula za a_n je linearna kombinacija funkcija $\sin\frac{n\pi}{3}$ i $\cos\frac{n\pi}{3}$. Temeljna (glavna) perioda funkcija $\sin$ i $\cos$ je 2π, zbog čega je temeljna perioda funkcija $\sin\frac{n\pi}{3}$ i $\cos\frac{n\pi}{3}$ broj $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$.

Zato je i funkcija $a_n = \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}$, to jest niz (a_n) periodan s periodom 6.

Provjerimo da za taj niz vrijedi: $a_{n+6} = a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= \sqrt{3}\sin\frac{(n+6)\pi}{3} - \cos\frac{(n+6)\pi}{3} \\ &= \sqrt{3}\sin(2\pi + \frac{n\pi}{3}) - \cos(2\pi + \frac{n\pi}{3}) \\ &= \sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Primjer 4. Niz (a_n) zadan je rekurzijskom relacijom $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 6a_{n+1} + 4a_n$; $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

a) Odredi daljnja tri člana niza.
b) Odredi formulu za opći član niza.

Rješenje.

a) $a_4 = 4a_3 - 6a_2 + 4a_1 = 12 - 12 - 4 = -4$, $a_5 = 4a_4 - 6a_3 + 4a_2 = -16 - 18 + 8 = -26$. Isto je tako $a_6 = -68$.

b) Pripadna diferencijska jednadžba glasi

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Jednadžbu napišimo u obliku:

$$\begin{gathered} x^3-2x^2-2x^2+4x+2x-4=0, \\ x^3(x-2)-2x(x-2)+2(x-2)=0, \\ (x-2)(x^2-2x+2)=0. \end{gathered}$$

Odavde je $x-2=0$, ili $x^2-2x+2=0$; a odatle $x_1=2, x_2=1+i, x_3=1-i$.
Jednadžba ima i kompleksnih rješenja, zbog čega je $a_n=A\cdot x_1^n+B\cdot \mathrm{Re}\, x_2^n+C\cdot \mathrm{Im}\, x_2^n$.
Budući da je:

$$x_2=1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

to je:

$$\mathrm{Re}\, x_2^n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4},\ \mathrm{Im}\, x_2^n=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Zato je:

$$a_n=A\cdot 2^n+B\cdot(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}+C\cdot(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Uvrstimo li u ovu jednadžbu za n redom 1, 2 i 3, dobit ćemo:

$$\begin{gathered} 2A+B+C=-1, \\ 4A+2C=2, \\ 8A-2B+2C=3. \end{gathered}$$

Rješenje ovog sustava je $A=-\frac{3}{4}$, $B=-2$, $C=\frac{5}{2}$. Konačno je:

$$a_n=-\frac{3}{4}2^n-2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}+\frac{5}{2}\cdot(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Lako se provjeri da se ovom formulom mogu izravno izračunati članovi izračunani pod a).

Primjer 5. Za niz (a_n) vrijedi: $a_{n+1}=3a_n+2$; $a_1=1$.

a) Odredi četiri početna nepoznata člana niza.

a) Odredi opći član niza.

Rješenje.

a) Iz zadanih podataka možemo izračunati drugi član niza, jer je $a_2=3a_1+2=3+2$, $a_2=5$. Sada možemo izračunati treći član: $a_3=3a_2+2=15+2$, $a_3=17$. Nastavimo li ovaj postupak, dobit ćemo $a_4=53$, $a_5=161,\ldots$.

b) Uz malo domišljatosti, zadatak bismo mogli riješiti općenito, i to ovako. Iz zadane relacije slijedi niz relacija:

$$\begin{aligned} a_n&=3a_{n-1}+2 \\ 3a_{n-1}&=3^2a_{n-2}+2\cdot 3, \\ 3^2a_{n-2}&=3^3a_{n-3}+2\cdot 3^2 \\ 3^3a_{n-3}&=3^4a_{n-4}+2\cdot 3^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3^{n-3}a_3&=3^{n-2}a_2+2\cdot 3^{n-3} \\ 3^{n-2}a_2&=3^{n-1}a_1+2\cdot 3^{n-2}. \end{aligned}$$

Zbrojimo li ove jednadžbe, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} a_n&=3^{n-1}a_1+2+2(3+3^2+3^3+\ldots+3^{n-2}) \\ a_n&=3^{n-1}\cdot 1+2+2\cdot 3\frac{3^{n-2}-1}{3-1} \\ &=3^{n-1}+2+3^{n-1}-3 \\ a_n&=2\cdot 3^{n-1}-1. \end{aligned}$$

Iako zadana rekurzijska relacija nije linearna, to jest ne možemo izravno primijeniti diferencijsku jednadžbu, ipak je možemo svesti na taj oblik.
Postupamo ovako:
iz $a_{n+1}=3a_n+2$ slijedi $a_{n+2}=3a_{n+1}+2$.
Oduzmemo li ove dvije jednadžbe, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} a_{n+2}-a_{n+1}&=3a_{n+1}+2-3a_n-2, \\ a_{n+2}&=4a_{n+1}-3a_n. \end{aligned}$$

Dobili smo linearnu rekurziju duljine 2. Zato, uz zadani prvi član, treba znati i drugi član niza. To se jednostavno izračuna: $a_2=3a_1+2=5$.
Diferencijska jednadžba glasi: $x^2-4x+3=0$.
Rješenja jednadžbe su: $x_1=1, x_2=3$.
Zato je $a_n=A\cdot 1^n+B\cdot 3^n$. Uvrstimo li za n vrijednosti 1 i 2, dobit ćemo $A+3B=1$, $A+9B=5$.
Rješenje ovog sustava je $A=-1$, $B=\frac{2}{3}$.
Formula za opći član niza glasi:

$$a_n=-1\cdot 1^n+\frac{2}{3}\cdot 3^n \text{ ili } a_n=2\cdot 3^{n-1}-1,$$

što smo već dobili prvim postupkom.