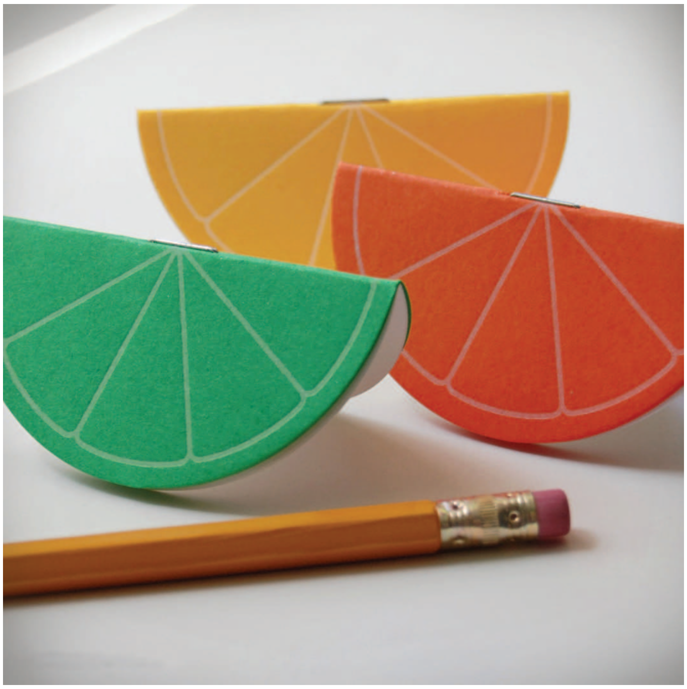
# Dijeljenje razlomaka



*Antonija Horvatek, Ivanić Grad*

U prošlom broju MiŠ-a izašao je članak u kojem je opisan jedan od načina na koji možemo učenicima približiti što se događa u zadacima u kojima množimo razlomke. U ovom ću članku opisati kako obrađujem dijeljenje razlomaka.

## Dijeljenje prirodnih brojeva

Prije nego što započnemo s dijeljenjem razlomaka, prisjetimo se na koje sve načine možemo pojasniti što se događa u zadacima u kojima dijelimo **prirodne brojeve**. U tu svrhu razmotrimo tri zadatka:

**1. zadatak:** $100 : 2$
U ovom zadatku možemo zamisliti da 100 kuna dijelimo na dvoje djece, te se pitamo koliko će kuna dobiti svako dijete. Svako će dijete dobiti 50 kuna, stoga je $100 : 2 = 50$.

Ovakav način razmišljanja praktičan je u zadacima u kojima je djelitelj mali broj, pa lako zamišljamo tako mali broj djece (djeljenik ne mora predstavljati novac, već može i bombone, čokolade...).

**2. zadatak:** $200 : 50$
Ako ovaj zadatak pokušamo riješiti poput prethodnog, zamislit ćemo da 200 kuna dijelimo na pedesetero djece. Zbog velikog broja djece, to nije lako zamisliti (niti skicirati). Ovdje je praktičnije upitati se koliko puta broj 50 ide u broj 200 ili npr. koliko novčanica od 50 kuna trebamo da bismo imali 200 kuna. Trebamo četiri takve novčanice, pa je $200 : 50 = 4$.

Ovakav način razmišljanja praktičan je kad je djelitelj *blizak* djeljeniku, u smislu da on mali broj puta stane u djeljenik, pa uzastopnim zbrajanjem djelitelja brzo dostignemo djeljenik. Kao što vidimo, pritom nije prepreka ni ako je djelitelj veliki broj.

**3. zadatak:** $72 : 9$
U ovom zadatku nas ni jedan od gornjih načina razmišljanja neće brzo dovesti do rješenja. Ovdje je najbolje jednostavno se osloniti na dobro poznavanje tablice množenja, te se upitati koji broj pomnožen s 9 daje 72, tj. riješiti zadatak $\_\_\_ \cdot 9 = 72$. Naravno, traženi je broj 8.

Za vrijeme ponavljanja tih načina rješavanja, s učenicima treba komentirati i to da se svaki od gornja tri zadatka može riješiti na sva tri načina, te da dolazimo do istog rješenja. Nakon toga započinjemo s dijeljenjem razlomaka.

## Prijelaz s dijeljenja na množenje

Kao što ćemo vidjeti, do pravila kako se dijele razlomci, dolazimo rješavajući jednostavne primjere u kojima nam je cilj uočiti da umjesto dijeljenja možemo množiti recipročnom vrijednošću djelitelja. Rješavajući takve primjere, uvježbavamo i prijelaz s dijeljenja na množenje, ali i kako zamisliti što se događa u zadatku. Prvi primjer koji rješavamo glasi ovako:

**Primjer:** Umetni znak $=$ ili $\neq$:

a) $6:3 \qquad 6\cdot\frac{1}{3}$

Lijevi zadatak je trivijalan, a desni riješimo na dva načina – i pismenim postupkom, i prisjetivši se da je $6\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 6=\frac{1}{3}$ od $6=2$. Uočavamo da su rezultati lijevog i desnog zadatka jednaki.

Nakon toga započinjemo usporedbu samih zadataka. Tražim od učenika da mi kažu što je zajedničko, a što različito u ta dva zadatka. Lako uočimo da je zajednički samo prvi broj $6$. Nadalje, u lijevom zadatku imamo dijeljenje, a u desnom množenje. Vezu između drugih brojeva, tj. brojeva $2$ i $\frac{1}{2}$, učenici ne uočavaju lako. Na pitanje kakvi su ti brojevi međusobno, odgovaraju da su različiti. Tek nakon potpitanja kakve smo brojeve učili na prošlom satu (ili upute da im usporedimo brojnike i nazivnike), uočavaju da su ti brojevi recipročni. Nakon toga im jasno kažem da sam *desni zadatak dobila iz lijevoga tako da sam*:

1. prvi broj prepisala,
2. umjesto ":" napisala "·",
3. umjesto drugog broja napisala njegovu recipročnu vrijednost.

Nakon toga obrađujemo b) primjer, u kojem ja zadajem samo lijevi zadatak $10:2$, a od učenika tražim da po maloprije opisanoj logici slože desni zadatak, te ćemo nakon toga usporediti rješenja. Učenicima je vrlo zanimljivo i izazovno to "slaganje desnog zadatka", te ubrzo shvate i zapamte logiku.

b) $10:2 \qquad 10\cdot\frac{1}{2}$

Desni zadatak ponovo riješimo na oba načina – i računskim putem, i kao "pola od 10" te uočimo jednakosti rješenja lijevog i desnog zadatka.

Razmislimo i je li logično da ćemo **dijeljenjem broja 10 s 2** (dok to izgovaram, pokazujem lijevi zadatak), dobiti **pola od 10** (pokazujem desni zadatak). Hoćemo li uvijek **dijeljenjem nekog broja s 2**, dobiti **pola** od tog broja? Dakle, je li dijeljenje s $2$ isto što i množenje s $\frac{1}{2}$?

Sličnu analizu napravimo i za a) primjer, te uočavamo da je dijeljenje s $3$ isto što i računanje trećine, tj. isto što i množenje s $\frac{1}{3}$.

Slično tomu, što dobivamo kad dijelimo s $5$? Je li to isto kao i množenje s $\frac{1}{5}$? ... Naziremo logiku prijelaza s dijeljenja na množenje.

## Dijeljenje razlomka prirodnim brojem

U c) primjeru opet zadam samo lijevi zadatak, a učenici slažu desni (i tako nastavljamo u svim sljedećim primjerima).

c) $\frac{1}{2}:3 \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

Kao i u prošlim primjerima, i ovdje desni zadatak riješimo i računski i kao $\frac{1}{3}$ od $\frac{1}{2}$, a zadnje predočimo skicom  .

Lijevi zadatak nam je nešto novo (dijeljenje u kojem imamo i razlomak), no jasno je da tu broj $\frac{1}{2}$ dijelimo na 3 jednaka dijela, a upravo to prikazuje i zadnja sličica. Uočavamo jednakost rezultata, ali i (ponovo) jednake načine razmišljanja u "podijeli s 3", "uzmi trećinu" i "pomnoži s $\frac{1}{3}$". Vidimo da je čak i sličica koja to predočava ista.

## Dijeljenje prirodnog broja razlomkom

d) $3 : \frac{1}{2}$ $\qquad$ $3 \cdot 2$

Desni zadatak je trivijalan, no pitanje je kako zamisliti što se događa u lijevom. Naravno, prvo prepustim učenicima da sami razmisle i kažu ideje, a nakon toga se prisjetimo kako u zadatku $200 : 50$ dolazimo do rješenja. Pitamo se koliko puta broj 50 ide u broj 200, pa ćemo se u zadatku $3 : \frac{1}{2}$ pitati koliko puta broj $\frac{1}{2}$ ide u broj 3. Konkretnije, koliko puta moramo uzeti po pola kruha da bismo imali tri kruha? Odgovor je 6, te opet uočimo jednakost rezultata lijevog i desnog zadatka. Naravno, i skiciramo.

e) $7 : \frac{1}{9}$ $\qquad$ $7 \cdot 9$

I ovdje ćemo lijevi zadatak riješiti pitajući se koliko puta broj $\frac{1}{9}$ stane u 7. No, za razliku od prošlog primjera u kojem smo lako skicirali i brojili (imali smo manje brojeve), ovdje se treba domisliti nekim "prečicama", tj. tomu da prvo uočimo koliko devetina ima u **jednom cijelom** (ima ih 9), a onda to množimo sa 7 (da bismo dobili koliko je devetina u **7 cijelih**). Dakle, ovdje smo zbog nepraktičnosti brojenja (dugo bi trajalo) prisiljeni uočiti i račun $7 \cdot 9$! Time uočavamo i **logiku zašto** $7 : \frac{1}{9}$ računamo kao $7 \cdot 9$. Opet uočavamo logičan prijelaz s dijeljenja na množenje!

## Dijeljenje razlomka razlomkom

f) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \cdot 4$

Desni zadatak znamo riješiti od prije, a lijevi rješavamo razmišljajući koliko puta broj $\frac{1}{4}$ ide u broj $\frac{1}{2}$, tj. koliko četvrtina trebamo uzeti da bismo imali polovinu. Skiciramo , a možemo se opet sjetiti i primjera s kruhom (koliko četvrtina kruha trebamo uzeti da bismo imali pola kruha), te dolazimo do rezultata 2. Opet uočavamo jednakost rezultata lijevog i desnog zadatka.

Ovdje je malo teže uočiti kako povezati što se događa u zadacima $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2} \cdot 4$, tj. kako objasniti da oni "imaju istu logiku". Učenici šestog razreda uglavnom ne mogu pratiti to objašnjenje, no za čitatelje ovog članka, objašnjenjem zaokružimo i taj dio priče:

Krenimo od zadatka $1 : \frac{1}{4}$. Njegov je rezultat 4 jer broj $\frac{1}{4}$ četiri puta ide u broj $1$. Sad umjesto broja $1$ u taj zadatak ubacimo broj $\frac{1}{2}$. Budući da broj $\frac{1}{2}$ čini pola broja $1$, logično je da će broj $\frac{1}{4}$ u jednu polovinu stati napola manje puta nego što stane u broj $1$, a to je napola manje od $4$, tj. $\frac{1}{2} \cdot 4$. Budući da se upravo u zadatku $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ pitamo koliko puta broj $\frac{1}{4}$ stane u broj $\frac{1}{2}$, upravo smo objasnili da do tog rezultata dolazimo računajući $\frac{1}{2} \cdot 4$. Time smo spojili razmišljanja u zadacima $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2} \cdot 4$, tj. zaključili smo da je i logično da vrijedi $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 4$.

g) $\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} \cdot 2$

Desni zadatak opet lako riješimo (znamo ga od prije), no lijevi uspijeva razumjeti samo mali broj učenika. Naime, ovdje se pitamo koliko puta broj

$\frac{1}{2}$ ide u broj $\frac{1}{4}$, a on ne ide ni jednom (veći broj pokušavamo "utrpati" u manji). Ipak, nekim je učenicima intuitivno jasno da je odgovor $\frac{1}{2}$. Opet uočimo jednakost rezultata.

Koja je logika jednakosti $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2$, može se objasniti slično kao u f) primjeru, dakle uspoređujući sa zadatkom $1 : \frac{1}{2} \ldots$

## Računski postupak i svojstva dijeljenja razlomaka

Nakon gornjih primjera učenici i sami znaju lijepo izreći/opisati koji je računski postupak dijeljenja razlomaka. Zapišemo ga (riječima) te krećemo na uvježbavanje. Za vrijeme uvježbavanja dobro je ubacivati i zadatke kroz koje uočavamo svojstva dijeljenja – i ona koja poznajemo od prije (za koja od prije znamo da vrijede za prirodne brojeve, pa sad uočimo da vrijede i ovdje), ali i neka nova koja dosad nismo imali prilike uočiti (jer nismo računali s razlomcima):

- dijeljenjem razlomka sa samim sobom dobivamo broj 1 (pojasnimo i logički što se događa u takvom zadatku, a riješimo i računskim postupkom);
- dijeljenjem razlomka brojem 1, dobivamo isti taj razlomak;
- dijeliti s nulom i dalje ne možemo, npr. $\frac{2}{3} : 0$ nema rješenja;
- dijeljenjem nule s razlomkom dobivamo nulu, npr. $0 : \frac{2}{3} = 0$;
- rezultat dijeljenja i dalje možemo provjeravati množenjem u suprotnom smjeru (npr. ako je $\frac{7}{9} : \frac{5}{6} = \frac{14}{15}$, onda vrijedi i $\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{9}$ – provjerimo to barem u jednom zadatku);
- ako je brojnik/nazivnik djeljenika djeljiv s brojnikom/nazivnikom djelitelja, onda dijeljenje razlomaka možemo izvršiti jednostavno dijeljenjem brojnika/nazivnika, npr. $\frac{12}{35} : \frac{3}{5} = \frac{4}{7}$. Pritom učenike treba upozoriti da ne učine "slično" u zadatku npr. $\frac{3}{35} : \frac{12}{5}$ (treba paziti na smjer dijeljenja!);
- ako dijelimo prirodne brojeve (npr. $3 : 5$), rezultat $\frac{3}{5}$ se vidi odmah jer razlomačka crta označuje dijeljenje, no isti se zadatak može riješiti i dopisivanjem jedinica u nazivnike, $3 : 5 = \frac{3}{1} : \frac{5}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, te se dobiva isti rezultat. S učenicima to treba komentirati jer kad im se usred hrpe zadataka s razlomcima ubace ovakvi zadaci, većina učenika "zablokira" uz komentar "$3 : 5$ se ne može izračunati!", te ne znaju što bi dalje. Isti se problem pojavi i poslije ako među zadatke s više računskih ubacimo npr. $(1 - 1 : 4) : (1 - 1 : 2)$;
- ako djeljeniku i djelitelju zamijenimo mjesta, dobivamo recipročan rezultat. To se lako uoči kad imamo prirodne brojeve (npr. $2 : 3 = \frac{2}{3}$, a $3 : 2 = \frac{3}{2}$). Vrijedi li to i za razlomke?... Možemo li, koristeći se tim saznanjem, odmah reći koliki je (sređeni) rezultat zadatka $6 : 42$?
- ako dijelimo brojem manjim od 1, kakav je količnik u odnosu na djeljenik? Kroz životne primjere treba pojasniti što se događa u takvim zadacima (sjetimo se pojašnjenja iz d) primjera)...

Ovdje bih još posebno istaknula dva detalja na kojima sam uočila da učenici često griješe, te im na to treba skrenuti pažnju:

- kod dijeljenja s mješovitim brojem, npr. u zadatku $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{8}$, mnogi učenici već kod pretvaranja u razlomke umjesto dijeljenja zapišu množenje, $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8}$, što je, naravno, krivo! Kad im prvi put zadam takav zadatak, obično im kažem neka ga svatko sam riješi u bilježnici, a nakon toga ćemo usporediti rezultate. Kod usporedbe rezultata nastane "svađa u razredu" (svatko je uvjeren da je baš on točno riješio)... Zatim, a da im ne kažem čije je rješenje točno, tražim nekoga od učenika (izaberem nekoga tko ima krivi rezultat) da mi izdiktira postupak (ja ga zapisujem na ploči), te se uvijek na onom problematičnom/krivom detalju jave oni koju su shvatili da tu ne ide množenje... Dakle, treba jasno naglasiti da se dijeljenje pretvara u množenje tek onda kad umjesto djelitelja pišemo njegovu recipročnu vrijednost. Te dvije pretvorbe, "dijeljenje $\longrightarrow$ množenje" i "djelitelj $\longrightarrow$ recipročna vrijednost", idu *ruku pod ruku zajedno*. Nakon takvog pojašnjenja, većina učenika to zapamti.

- učenici se često neprecizno izražavaju, te nerijetko uopće ni ne razumiju razliku između npr. "podijeli na pola", "podijeli s pola" i "podijeli na dva jednaka dijela". Mnogi u zadatku $3 : \frac{1}{2}$ brzopleto očekuju da će rezultat biti pola broja 3, tj. $1\frac{1}{2}$. Stoga treba komentirati kako će glasiti zadatak u kojem **broj 3 dijelimo <u>na</u> pola**, a kako onaj u kojem broj **3 dijelimo <u>sa</u> pola**. U kojem od tih zadataka zapravo **broj 3 dijelimo na dva jednaka dijela**? Koji je gdje rezultat? Jesu li jednaki? Ovdje se prisjetimo i da je $\frac{1}{2} \cdot 3$ zapravo "pola broja 3"... Nije lako sve to pratiti...

## Životni zadaci

U životnim zadacima učenici dosta dobro prepoznaju je li riječ o zadatku u kojem imamo dijeljenje, a pogotovo ako se u samom tekstu zadatka spominje da se nešto dijeli. Međutim, mnogi imaju problema s interpretacijom rezultata. Promotrimo rezultate u sljedećim zadacima:

**Zadatak 1.** Valentin je dobio zadatak da 10 kg šećera raspodijeli u vrećice u koje stane $\frac{3}{4}$ kg šećera. Koliko mu je takvih vrećica potrebno?

Dijeljenjem $10 : \frac{3}{4}$ dobivamo $13\frac{1}{3}$. Je li prirodno odgovoriti da Valentinu treba $13\frac{1}{3}$ vrećica? Što nam taj rezultat zapravo govori o tome kako će on napuniti vrećice i koliko onda on vrećica zapravo treba?

**Zadatak 2.** Ivan 10 kg šećera treba podijeliti na 4 jednake hrpe. Koliko će šećera biti na svakoj hrpi?

Dijeljenjem $10 : 4$ dobivamo $2\frac{1}{2}$. Trebamo li i ovdje broj $2\frac{1}{2}$ zaokružiti na cijeli ili ovdje u odgovoru treba ostaviti upravo broj $2\frac{1}{2}$?

**Zadatak 3.** Za izradu jednog čarobnjačkog plašta krojačici je potrebno $1\frac{1}{10}$ m platna. Koliko takvih plašteva može napraviti od $6\frac{4}{5}$ m platna?

Dijeljenjem $6\frac{4}{5} : 1\frac{1}{10}$ dobivamo $6\frac{2}{11}$. Kako ovdje interpretirati rezultat? Koji je odgovor na postavljeno pitanje?

Dakle, u prvom zadatku dobiveni rezultat zaokružujemo na **veće** cijelo, u drugom ga uopće ne zaokružujemo, a u trećem zaokružujemo na **manje** cijelo. Mnoga se djeca *izgube* u tome...

## Objašnjenje pozadine računskog postupka dijeljenja razlomaka

Jeste li se ikad upitali otkud taj "čudan postupak" dijeljenja razlomaka, u kojem prelazimo na množenje s recipročnom vrijednošću? Jeste li pronašli objašnjenje za njega? Je li se ikoji vaš profesor matematike za vrijeme vašeg školovanja upustio u objašnjavanje toga? Možda je vama kao učenicima/studentima zadao da istražite zašto je tako? Vjerujem da su mnogima od nas odgovori na većinu ovih pitanja negativni.

Iako nije trivijalno otkriti objašnjenje pozadine tog postupka, s druge strane nije ga ni preteško shvatiti ako objašnjenje rascjepkamo na nekoliko koraka. Objasnimo to na primjeru $\frac{4}{5} : \frac{2}{7}$. Kad ne bismo znali koji je postupak dijeljenja, kako bismo razmišljali pri rješavanju ovog zadatka? Bismo li došli do množenja recipročnom vrijednošću? Riješimo taj zadatak u četiri koraka:

**1. korak:**
U ovom koraku zadržimo samo broj 7 u nazivniku djelitelja, a umjesto ostalih brojnika i nazivnika stavimo jedinice. Dobivamo zadatak $1 : \frac{1}{7}$. Pitamo se koliko puta broj $\frac{1}{7}$ stane u $1$. Iz same definicije pojma sedmine zaključujemo da stane 7 puta. Dakle, $1 : \frac{1}{7} = 7$.

**2. korak:**
Ubacimo u igru i brojnik djelitelja. Dobivamo zadatak $1 : \frac{2}{7}$. Pitamo se koliko puta broj $\frac{2}{7}$ ide u broj $1$. U traženju odgovora uočimo da je broj $\frac{2}{7}$ **dva puta veći** od broja $\frac{1}{7}$, te će stoga on u broj $1$ stati **dva puta manje** puta nego broj $\frac{1}{7}$. Kako $\frac{1}{7}$ u broj $1$ stane 7 puta, onda broj $\frac{2}{7}$ u $1$ stane $7 : 2$, tj. $\frac{7}{2}$ puta. Dakle $1 : \frac{2}{7} = \frac{7}{2}$.

**3. korak:**
Sad uvedimo u igru i brojnik djeljenika. Dobivamo zadatak $4 : \frac{2}{7}$. Iz drugog koraka znamo da $\frac{2}{7}$ u $1$ ide $\frac{7}{2}$ puta, a kako je broj 4 **četiri puta veći** od broja $1$, onda će broj $\frac{2}{7}$ u njega stati **četiri puta više** puta, tj. $4 \cdot \frac{7}{2}$ puta. Takvim razmišljanjem zaključujemo da je $4 : \frac{2}{7} = 4 \cdot \frac{7}{2}$.

**4. korak:**
Sad napokon razmotrimo cijeli zadatak, $\frac{4}{5} : \frac{2}{7}$. Iz trećeg koraka znamo da je $4 : \frac{2}{7} = 4 \cdot \frac{7}{2}$, tj. da broj $\frac{2}{7}$ u broj 4 ide $4 \cdot \frac{7}{2}$ puta. Koliko će onda on puta stati u broj koji je **5 puta manji** (tj. u broj $\frac{4}{5}$)? Jasno, stat će **5 puta manje** puta, tj. $4 \cdot \frac{7}{2} : 5$. Mi matematičari lako uočavamo da je to jednako $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2}$, pa smo time zaključili da je $\frac{4}{5} : \frac{2}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{2}$.

Na isti način može se dokazati da za bilo koja četiri prirodna broja $a$, $b$, $c$, $d$ vrijedi $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Naravno, ova objašnjenja nisu primjenjiva u osnovnoškolskoj nastavi matematike jer će malo koji osnovnoškolac to moći pratiti. Ona su navedena da bismo za čitatelje MiŠ-a zaokružili priču o dijeljenju razlomaka.