Nizovi
1. dio: Uvodno o nizovima

Anđelko Marić, Sinj

Nedavno sam se s urednikom ovog časopisa dogovorio o suradnji u sljedećoj školskoj godini. Kada sam odlučio početi o tome pisati, nikako nisam mogao sastaviti prvu rečenicu.

Naime, naišao sam na problem matematičke strogosti, kojoj se mora težiti u svakom matematičkom tekstu, a kojom, ni u jednom od pokušaja, to nisam uspijevao.

Da pojasnimo o čemu se radi, napišimo tu prvu rečenicu onako kako sam se na kraju odlučio, a kojom još uvijek nisam zadovoljan.

Profesor Dakić i ja dogovorili smo da ćemo u ovoj školskoj godini objaviti **niz članaka o nizovima**.

Na prvi pogled izgleda da je sve jasno i vjerojatno je svaki čitatelj razumio što smo se nas dvojica dogovorili. Ali, kako ćemo odmah vidjeti, to nije sasvim u suglasju sa strogim matematičkim jezikom.

Sporna je riječ **niz** koja se u rečenici pojavljuje dva puta.

Druga od tih dviju riječi (koja se navodi u množini) je **matematički pojam**, o kojem čitatelj ne mora ništa znati, jer se s tim pojmom upoznaje upravo sada, u članku. Dakle, ta je riječ *stručni naziv* ili *terminus technicus* koji se *definira*.

Prva riječ to nije, jer inače rečenica ne bi imala smisla. To je takozvana *neutralna* riječ, uzeta iz običnoga, svakodnevnog života i čije značenje prihvaćamo iskustveno, bez definiranja.

Ovo znači da ove dvije (*iste*) riječi ne znače isto i podsjećaju nas na izraz *idem non est idem* (*isto nije isto*), što smo nekoć učili u logici.

Stvar postaje još složenija ako prihvatimo da je i prva riječ matematički pojam.

Broj članaka, ma koliko ih bilo, je konačan, a svaki je niz, ako se to posebno ne naglasi, po definiciji, beskonačan.

To opet znači da u tekstu, pa bio on i matematički, ne možemo uvijek i pod svaku cijenu inzistirati na dosljednoj matematičkoj strogosti.

Da bi čitatelj mogao pratiti ovaj tekst, dovoljno je da vlada osnovnim pojmovima o funkcijama i skupovima brojeva, od prirodnih do realnih. Posebno je važan skup prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. To znači da se ovo može obraditi kao posebna tema dodatne nastave u bilo kojem razredu srednje škole.

Definicija, nazivlje i temeljni pojmovi o nizovima

Neka je S bilo koji neprazni skup, funkcija $a : \mathbf{N} \to S$ zove se **niz** ili **slijed**. Vrijednosti $a(n)$ te funkcije češće označujemo a_n i zovemo ih **članovima** niza.

Ako je S neki skup brojeva, ovako definiran niz je **brojevni** niz. Ako li je pak S podskup skupa $\mathbf{R}$, niz je **realni**. Mi ćemo promatrati samo takve, to jest *realne nizove*.

Ako niz promatramo kao cjelinu, onda ga označujemo (a_n), to jest članovi niza (a_n) su: $a_1, a_2, a_3 \ldots$.

Pritom je a_1 prvi, a_2 drugi, a_3 treći član niza i tako dalje. Isto je tako a_n **opći** član niza.

Prirodni brojevi $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ u oznakama $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ zovu se **indeksi** pripadnih članova.

Vidimo da svaki niz, po definiciji, ima beskonačno mnogo članova, jer skup $\mathbf{N}$ ima beskonačno mnogo članova. Uvedemo li oznaku $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, kažemo da je $\mathbf{N}_n$ skup od n početnih prirodnih brojeva (često piše da je to skup n *prvih* članova, što nije dobro, jer svaki uređeni skup, ma kako ga uredili ima samo jedan prvi član).

Ako umjesto funkcije $a : \mathbf{N} \to S$ definiramo $a : \mathbf{N}_n \to S$, onda su brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ članovi **konačnog niza** ili **sloga**.

Ako za svaki $n \in \mathbf{N}$ i niz (a_n) vrijedi $a_{n+1} \geq a_n$, kažemo da je slijed $a(n)$ **rastući** ili **uzlazan**. Ako li pak vrijedi $a_{n+1} \leq a_n$, niz je **padajući** ili **silazan**.

Ako u ovoj definiciji umjesto znakova $\geq$, odnosno $\leq$, vrijede znakovi $>$, odnosno $<$, niz je **strogo rastući**, odnosno **strogo padajući**.

Niz koji je (strogo) rastući ili (strogo) padajući zove se **(strogo) monoton niz**.

Ako su svi članovi niza jednaki, to jest $a_n = c$, gdje je c realan broj, niz je **stalan** ili **konstantan**.

Ako za niz (a_n) postoji realan broj m, tako da za svaki n vrijedi $a_n \geq m$, kažemo da je niz **omeđen odozdo**. Broj m zove se **donja međa** ili **donja ograda** niza.

Ako za niz (a_n) postoji realan broj M, tako da za svaki n vrijedi $a_n \leq M$, kažemo da je niz **omeđen odozgor**. Broj m se zove **gornja međa** ili **gornja ograda** niza.

Za niz koji je omeđen i odozdo i odozgor kažemo da je **omeđen** niz.

Svi ovi pojmovi: rastući, padajući, monoton, stalan i omeđen slično se definiraju i za funkcije, što je bilo i za očekivati, jer se realan niz može shvatiti kao *restrikcija* realne funkcije u kojoj je domena $\mathbf{R}$ zamijenjena novom domenom, njezinim podskupom $\mathbf{N}$.

Za niz (a_n) i prirodan broj n definira se izraz $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$, koji zovemo **$n$-ti djelomični zbroj** ili **n-ta parcijalna suma** tog niza.

Sada se za zadani niz (a_n) može definirati niz djelomičnih zbrojeva (s_n). To znači da je nizom (a_n) određen niz (s_n). Poslije ćemo pokazati da vrijedi i obratno.

Niz može biti zadan na više načina.

- Najjednostavnije i najzgodnije je ako je niz (a_n) zadan izrazom, funkcijom, to jest $a_n = a(n)$;
- Isto tako niz može biti zadan s nekoliko početnih članova tog niza, uz posebno zadane uvjete koji jednoznačno određuju niz;
- Rekurzijom, to jest relacijom kojom se opći član niza izražava pomoću nekoliko prethodnih članova, uz navedene neke posebne podatke;
- Posebni nizovi mogu biti zadani posebnim uvjetima (na primjer, takozvani **geometrijski** niz je zadan s bilo koja dva člana niza).

Ovo ćemo sve pojasniti na nekoliko primjera.

Primjer 1. Za zadane nizove:

a) $a_n = 5n - 7$;

b) $a_n = 3n^2 - 5n$;

c) $a_n = \dfrac{2n+34}{3n+1}$;

d) $a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+4}$;

e) $a_n = \dfrac{75}{n} - \dfrac{n^2+3}{2}$;

izračunaj, redom, prvi, drugi, treći, četvrti i peti član.

Rješenje:

a) $a_1 = 5 \cdot 1 - 7$, $a_1 = -2$;

b) $a_2 = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 12 - 10$, $a_2 = 2$;

c) $a_3 = \dfrac{2 \cdot 3 + 34}{3 \cdot 3 + 1} = \dfrac{40}{10}$, $a_3 = 4$;

d) $a_4 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^8 = \dfrac{3^4}{4^4} - \dfrac{1}{2^8} = \dfrac{81-1}{4^4}$
$= \dfrac{80}{16 \cdot 16}$, $a_4 = \dfrac{5}{16}$;

e) $a_5 = \dfrac{75}{5} - \dfrac{5^2+3}{2} = 15 - 14$, $a_5 = 1$.

Primjer 2. Koji su od zadanih brojeva: -7, $-\dfrac{1}{5}$, 10, 17, -11 članovi niza $a_n = \dfrac{3n+4}{2n-3}$?

Rješenje: Broj x je član zadanog niza samo ako postoji *prirodan broj* n, tako da vrijedi $\dfrac{3n+4}{2n-3} = x$. Odavde je $2nx - 3x = 3n + 4$, $n = \dfrac{3x+4}{2x-3}$. Uvrstimo li za x zadane brojeve, dobijemo redom:

- $n = \dfrac{-21+4}{-14-3} = \dfrac{-17}{-17} = 1, \; n \in \mathbf{N}$;
- $n = \dfrac{-\frac{3}{5}+4}{-\frac{2}{5}-3} = \dfrac{-3+20}{-2-15} = \dfrac{17}{-17} = -1$,
  n nije prirodan broj;
- za $x = 10$ vrijedi $n = \dfrac{30+4}{20-3} = 2$, $n \in \mathbf{N}$;
- za $x = 17$, imamo $n = \dfrac{51+4}{34-3} = \dfrac{55}{31}$, *n nije* prirodan broj;
- isto je tako za $x = -11$, $n = \dfrac{-33+4}{-22-3} = \dfrac{29}{25}$, *n nije* prirodan broj.

Od zadanih brojeva, brojevi -7 i 10 su članovi zadanog niza, a ostali nisu. Isto tako vidimo da je $a_1 = -7$ i $a_2 = 10$.

Primjer 3. U nizu $a_n = 3bn + 2$ odredi b tako da treći član bude 20. Koji je u tom slučaju stoti član niza?

Rješenje: Za $n = 3$ vrijedi $a_n = 20$. Zato je $3 \cdot b \cdot 3 + 2 = 20$, $b = 2$. Jednadžba niza glasi $a_n = 9n + 2$, odakle je stoti član $a_{100} = 902$.

Primjer 4. Za niz $a_n = \dfrac{pn-1}{pn-8}$, $p \in \mathbf{R}$ vrijedi $a_5 = 2$. Odredi sljedeći član niza.

Rješenje: Iz zadanih podataka imamo $\dfrac{5p-1}{5p-8} = 2$, $10p - 16 = 5p - 1$, $5p = 15$, $p = 3$. Opći član niza je $a_n = \dfrac{3n-1}{3n-8}$. Treba odrediti šesti član niza. Za $n = 6$, imamo $a_6 = \dfrac{18-1}{18-8}$, $a_6 = \dfrac{17}{10}$.

Primjer 5. Zadani su nizovi $a_n = \dfrac{n+11}{n-3}$ i $b_n = n^2 - 6n + x$. Odredi x tako da se ti nizovi podudaraju u petom članu.

Rješenje: Peti član niza (a_n) je $a_5 = \dfrac{5+11}{5-3}$, $a_5 = 8$. Mora biti $b_5 = 8$, zato je $5^2 - 6 \cdot 5 + x = 8$, $x = 13$.

Primjer 6. Zadani su nizovi $a_n = 4n - 7$ i $b_n = 2n^2 - 3n + 5$. Postoje li po dva susjedna člana tih nizova (ne nužno s istim indeksima) da su razlike tih članova jednake?

Rješenje: Treba odgovoriti na pitanje: postoje li prirodni brojevi p i q, tako da je

$$|a_{p+1} - a_p| = |b_{q+1} - b_q|.$$

$$a_{p+1} - a_p = 4(p+1) - 7 - (4p-7) = 4.$$
$$b_{q+1} - b_q = 2(q+1)^2 - 3(q+1) + 5 - 2q^2 + 3q - 5 = 4q - 1.$$

Razlika bilo kojih dvaju susjednih članova prvog niza jednaka je 4. Zato bi moralo biti $4q - 1 = 4$, $q = \frac{5}{4}$, što je nemoguće jer $\frac{5}{4}$ nije prirodan broj.

Primjer 7. Zadani su nizovi: $a_n = -5n + 4$, $b_n = \frac{7n+2}{2n+1}$, $c_n = n^2 - 40n - 1$. Ispitaj monotonost svakog od tih nizova.

Rješenje: Ispitati monotonost nekog niza znači utvrditi je li taj niz monoton ili nije. Potom, ako je niz monoton, treba utvrditi je li niz rastući ili padajući.

Podsjetimo se: niz je rastući ako je

$$a_{n+1} \geq a_n \iff a_{n+1} - a_n \geq 0,$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Isto je tako za padajuće nizove $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Vidimo da je monotonost niza određena predznakom izraza $a_{n+1} - a_n$. Zato računamo ovako:

$$a_{n+1} - a_n = -5(n+1) + 4 + 5n - 4 = -5 < 0.$$

Niz a_n je strogo padajući.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{7(n+1)+2}{2(n+1)+1} - \frac{7n+2}{2n+1} \\ &= \frac{7n+9}{2n+3} - \frac{7n+2}{2n+1} \\ &= \frac{(7n+9)(2n+1) - (7n+2)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{3}{(2n+3)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Budući je $(2n+3)(2n+1) > 0$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, to je $b_{n+1} - b_n > 0$, to jest niz je strogo rastući.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (n+1)^2 - 40(n+1) \\ &\quad - 1 - n^2 + 40n + 1 \\ &= 2n - 39. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je, zbog $n \in \mathbf{N}$, za $n < 20$, $c_{n+1} - c_n < 0$, a za $n > 20$, $c_{n+1} - c_n > 0$.

Zaključujemo da je za $n \in [1, 19]$ niz c_n strogo padajući, a za $n \in [20, +\infty]$ strogo rastući, to jest niz nije monoton.

Primjer 8. Ispitaj omeđenost nizova:

a) $a_n = 7n + 8$;

b) $a_n = -3n - 30$;

c) $a_n = \frac{3}{n+1}$;

d) $a_n = \frac{3n-5}{n+1}$;

e) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

Rješenje: Treba utvrditi postoje li realni brojevi m i M, tako da za svaki prirodni broj n vrijedi barem jedna od sljedećih dviju relacija: $a_n \geq m$, $a_n \leq M$.

a) Vrijedi niz nejednakosti: $n \geq 1$, $7n \geq 7$, $7n + 8 \geq 15$; $a_n \geq 15$. Broj $m = 15$ je donja međa niza. Ne postoji realan M, tako da je $n \leq M$, za svaki prirodan broj n. Zato ne postoji M, tako da je $7n + 8 = a_n \leq M$. Vidimo da za zadani niz postoji donja, a ne postoji gornja međa. Niz (a_n) je omeđen odozdo;

b) Postupamo kao i za prethodni niz: $n \geq 1$, $-3n \leq -3$, $-3n - 30 \leq -3 - 30$, $a_n \leq -33$. Zaključujemo da postoji gornja međa niza, to jest da je niz omeđen odozgor. Potpuno na isti način dokaže se da niz nije omeđen odozdo;

c) Za svaki prirodni broj n vrijedi $n+1 > 0$. Također je $3 > 0$. Kvocijent dvaju pozitivnih brojeva je pozitivan broj. Zato je $a_n > 0$ za svaki n. Isto je tako $n + 1 \geq 2$, zbog čega je $\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{2}$, to jest $a_n \leq \frac{3}{2}$. Iz svega zaključujemo da je $0 < a_n \leq \frac{3}{2}$. Vidimo da je niz omeđen i odozdo i odozgor, to jest niz je omeđen;

d) Zadani niz napišemo u obliku:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n+3-8}{n+1} = \frac{3(n+1)-8}{n+1} \\ &= 3 - \frac{8}{n+1}. \end{aligned}$$

Iz $2 \leq n+1 < +\infty$, zaključujemo da je $-1 \leq 3 - \dfrac{8}{n+1} < 3$, ili $-1 \leq a_n < 3$, odakle zaključujemo da je niz omeđen.

e) Ispišimo nekoliko članova niza: $-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \ldots$. Lako zaključimo da niz nije omeđen ni odozdo, ni odozgor.

Primjer 9. Za niz (a_n) zadano je $s_n = n^2 - 2n$. Odredi:

a) četiri početna člana niza;

b) stoti član niza;

c) opći član niza.

Rješenje:

a) $a_1 = s_1 = 1^2 - 2 \cdot 1$, $a_1 = -1$; $s_2 = 2^2 - 2 \cdot 2$, $s_2 = 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $a_2 = -a_1 = 1$; $\underbrace{a_1 + a_2}_{0} + a_3 = s_3$, $a_3 = 9 - 6$, $a_3 = 3$; $\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{s_3} + a_4 = s_4$, $3 + a_4 = 16 - 8$, $a_4 = 5$.

b) Postupkom pod a) može se izračunati bilo koji član niza, ali prije toga treba izračunati i sve prethodne članove niza. Za članove s velikim indeksom to može biti veoma dugo. Zamislite da treba izračunati milijunti član niza! Zato postupamo ovako:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}}_{s_{99}} + a_{100} = s_{100}$$

$$s_{99} + a_{100} = s_{100}$$

$$99^2 - 198 + a_{100} = 100^2 - 200$$

$$a_{100} = (100 - 99)(100 + 99) - 2 = 199 - 2$$

$$a_{100} = 197.$$

c) Vrijedi:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} + a_n = s_n,$$

odakle je

$$s_{n-1} + a_n = s_n,$$

ili

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Ovu formulu trebalo bi zapamtiti. Za zadani niz vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 - 2n - \left[(n-1)^2 - 2(n-1)\right] \\ &= n^2 - 2n - \left(n^2 - 2n + 1 - 2n + 2\right) \\ a_n &= 2n - 3. \end{aligned}$$

Ovo je najjednostavniji i najkraći način da se riješi cijeli zadatak. Naime iz $a_n = 2n - 3$ izravno se dobije, primjerice: $a_1 = -1$, $a_3 = 3$, $a_{21} = 39$, $a_{100} = 197$, $a_{12345} = 24687$.

Pri zadavanju i rješavanju ovakvih zadataka moramo biti oprezni. Naime za izraz s_n ne može se zadati bilo koja funkcija $s(n)$ jer mora biti $s(0) = 0$. To je zato jer $s(0)$ znači da "zbrajamo nula članova" niza, što ne može biti neki realni broj različit od nule.

Tako smo, primjerice, u ovom zadatku za $s_n = n^2 - 2n$ odredili odgovarajući niz. Da smo, umjesto tog izraza, zadali $s_n = n^2 - 2n - 5$, uvjerili bismo se da zadatak nema rješenja, to jest, da za tako zadan s_n ne postoji odgovarajući niz. To je zato jer je $s(0) = -5 \neq 0$.

Provjerite to tako da pokušate riješiti ovaj zadatak (primjer 9), ako umjesto $s_n = n^2 - 2n$ uzmete $s_n = n^2 - 2n - 5$.

Primjer 10. U nizu (a_n) zadano je početnih šest članova, redom ovako: $1, 3, 5, 7, 9, 11$. Odredi sljedeći, to jest sedmi član niza.

Rješenje: Prije nego što riješimo zadatak, kažimo neke napomene. Koliko god se, na prvi pogled, zadatak činio jednostavnim, on to nije. Zadatak nema jednoznačno rješenje, to jest postoji više različitih realnih brojeva x za koje je $a_7 = x$.

Razmišljamo li ovako: svaki član niza (osim prvog) je za 2 veći od prethodnog, možemo zaključiti da je $a_7 = 13$. Isto tako, zaključujemo da su zadani brojevi članovi niza (svih) neparnih prirodnih brojeva u takozvanom prirodnom uređaju. Zato je $a_7 = 13$.

Promatrajmo sada nizove zadane formulama:

1)
$a_n=[1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)]\cdot(2n-1)$;

2) $a_n=\dfrac{2n-1}{1+(n-1)(n-3)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}$;

3)
$a_n=\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+(2n-1)}{1+(n-1)(n-3)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}$.

Lako utvrdimo da su, u svakom od ovih triju nizova, šest početnih članova upravo zadani brojevi: $1, 3, 5, 7, 9, 11$. Međutim, u svakom od tih nizova je $a_7 \neq 13$, jer za te nizove vrijedi:

1) $a_7 = (1+6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)\cdot13 = 721\cdot13 = 9373$;

2) $a_7 = \dfrac{13}{1+720} = \dfrac{13}{721}$;

3) $a_7 = \dfrac{720+13}{1+720} = \dfrac{733}{721}$.

Naravno da tri navedena niza nisu jedini nizovi sa zadanim uvjetima u kojima je $a_7 \neq 13$. Takvih nizova ima beskonačno mnogo.

Važan zaključak. Ako su u nizu (a_n) zadani (bez ikakvih dodatnih uvjeta) članovi: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, onda postoji beskonačno mnogo različitih nizova s tim zadanim članovima. To naime slijedi iz same definicije niza.

Primjer 11. Niz (a_n) zadan je rekurzivnom relacijom $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4+a_n}$, $a_1 = 3$; $n \in \mathbf{N}$. Odredi opći član niza.

Rješenje: Označimo li $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, tada je:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4+a_n}{a_n} \\ &= 4\cdot\frac{1}{a_n}+1 \\ b_{n+1} &= 4b_n+1. \end{aligned}$$

Odavde je:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 4b_n+1 \\ 4b_n &= 4^2b_{n-1}+4 \\ 4^2b_{n-1} &= 4^3b_{n-2}+4^2 \\ 4^3b_{n-2} &= 4^4b_{n-3}+4^3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 4^{n-2}b_3 &= 4^{n-1}b_2+4^{n-2} \\ 4^{n-1}b_2 &= 4^nb_1+4^{n-1}. \end{aligned}$$

Zbrojimo li ove jednakosti, dobit ćemo:

$$b_{n+1} = 4^nb_1+1+4+4^2+4^3+\ldots+4^{n-2}+4^{n-1}.$$

Odavde je, zbog $b_1 = \dfrac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3}\cdot4^n+\frac{4^n-1}{4-1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot4^n+\frac{1}{3}\cdot4^n-\frac{1}{3} \\ &= \frac{2\cdot4^n-1}{3}. \end{aligned}$$

Odavde je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{2\cdot4^n-1} \\ a_n &= \frac{3}{2\cdot4^{n-1}-1}. \end{aligned}$$

Ovaj niz članaka nastavlja se u sljedećim brojevima MiŠ-a.