Geometrijske nedoumice

Anđelko Marić, Sinj

Presjek, sjecište

U geometriji, pri proučavanju odnosa među skupovima točaka, često rabimo pojmove *sjecište* i *presjek*. Iako su ta dva pojma veoma bliska, ipak ih moramo razlikovati.

Sjecišta su konačni skupovi točaka koje pripadaju dvjema različitim *crtama* (pravcima, dužinama, kružnicama, općenito krivuljama). Ako pravac p i kružnica k imaju dvije zajedničke točke A i B, kažemo da pravac p *siječe* kružnicu k u tim točkama, odnosno točke A i B su njihova sjecišta.

Ako pravac p siječe kružnicu k u točkama A i B, tada je zajednički dio pravca p i kruga K, određenog kružnicom k dužina $\overline{AB}$. Kažemo da je ta dužina *presjek* pravca p i kruga K. Vidimo da zajednički dio dvaju skupova u ravnini može biti, u nekim slučajevima *sjecište* (*sjecišta*), a u nekima *presjek*.

Zajednički dio dvaju skupova točaka prostora zovemo, u pravilu, *presjek* tih skupova. Ako je udaljenost središta kugle K od ravnine P manja od polumjera kugle, tada je zajednički dio ravnine i kugle krug. Taj krug jest *presjek* kugle i ravnine.

Zajednički dio ravnine i poliedra, ako nije prazan skup, može biti: točka, dužina ili višekut. U svakom slučaju kažemo da je to *presjek* ravnine i poliedra.

Isto tako presjek dvaju poliedara može biti: prazan skup, točka, dužina, višekut ili poliedar.

Navedimo još jedan poseban naziv iz ove problematike, koji se uobičajio, naročito u nacrtnoj geometriji.

Pravac p koji nije usporedan s ravninom R ima s tom ravninom točno jednu točku zajedničku, koju označimo P. Kažemo da pravac p *probada* R u točki P. Točka P je *probodište* pravca p i ravnine R.

Baza; osnovica, osnovka, osnova

Riječ **baza** je grčkog podrijetla i znači *temelj*, *osnova*. Ta je riječ, kao stručni naziv, ušla i u hrvatsko matematičko nazivlje. Tako govorimo o *bazi* trapeza, *bazi* stošca, *bazi* logaritamskog sustava. Prvi pojam je planimetrijski, drugi stereometrijski, a treći algebarski. Zato ti pojmovi nisu ekvivalentni i u hrvatskom matematičkom nazivlju postoji poseban naziv za svaki od njih.

Ako stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC imaju jednake duljine, taj je trokut jednakokračan, te dvije stranice su *krakovi*, a treća stranica je *osnovica*.

Isto tako, ako su u četverokutu dvije stranice usporedne, tada je četverokut *trapez* i svaka od tih dviju stranica zove se *osnovica* trapeza.

Ako je $ABCD$ ravninski četverokut i V točka izvan ravnine tog četverokuta, tada se poliedar kojemu su točke A, B, C, D i V vrhovi zove četverostrana piramida. Četverokut $ABCD$ je *osnovka* te piramide. Isto se tako definira osnovka n-terostrane piramide za svaki prirodni broj $n > 2$.

Ako je a pozitivan realan broj, različit od 1, tada se funkcija $f(x) = a^x$ zove *eksponencijalna* funkcija. Broj a jest *osnova* te funkcije.

Inverzna funkcija ovako definirane eksponencijalne funkcije f zove se *logaritamska* funkcija i obilježava $\log_a x$. Vrijednosti te funkcije su *logaritmi* broja x, a broj a je *osnova* tih logaritama.

Da smo se, umjesto domaćeg, opredijelili za opće prihvaćeno međunarodno nazivlje, tada bismo svaku od riječi *osnovica*, *osnovka* i *osnova* zamijenili riječju *baza*. Zato treba biti oprezan kada riječ *baza* zamjenjujemo jednom od navedenih domaćih riječi.

Stranica, strana, ploha

Riječi *stranica*, *strana* i *ploha* pripadaju u hrvatsko matematičko nazivlje i svaka od njih ima točno određeno značenje. Ponekad se brkaju pojmovi stranica i strana, a isto tako se često ne razlikuju pojmovi strana i ploha.

Sva tri pojma na koje se odnosi ovaj tekst su geometrijska: *stranica* je planimetrijski, a *strana* i ploha su stereometrijski pojmovi. Riječ *strana*, osim ovih geometrijskih, ima još neka značenja, kao što su *strana* jednadžbe, *strana* (orijentirane) ravnine. O tome ovdje neće biti riječi.

Stranica je dužina kojoj su rubovi dva *susjedna* vrha *višekuta*. Riječi *susjedna* i *višekuta* su s razlogom istaknute. Spoje li se dva nesusjedna vrha višekuta, dobije se dužina koja je *dijagonala*, a ne stranica višekuta. Ako, umjesto u višekutu, spojimo dva vrha *poliedra*, tada ta spojnica (dužina) nije stranica, nego je *brid* ili (plošna, odnosno prostorna) *dijagonala* poliedra. Osim toga u poliedru se ne definiraju susjedni vrhovi.

Dio prostora (geometrijsko tijelo) omeđeno određenim brojem *višekuta* jest poliedar. Najmanji broj tih višekuta je četiri i tada je poliedar tetraedar. Svaki od tih višekuta jest *strana* poliedra. Bitna razlika: *stranica* je dužina, *strana* je višekut.

Geometrijsko tijelo može biti omeđeno skupovima točaka koji nisu višekuti. Svaki od tih skupova točaka zove se *ploha* tog tijela. Tako je, na primjer, *kugla* omeđena samo jednom (zakrivljenom) plohom koja se zove *sfera*, *stožac* je omeđen dvjema plohama, jednom ravnom (krug) i jednom zakrivljenom (plašt). Postoje tijela koja su omeđena s nekoliko višekuta i s još nekoliko zakrivljenih ploha. I ti su višekuti plohe tijela. Zato su svi skupovi točaka koji omeđuju tijelo plohe tog tijela. Ako je svaka od tih ploha višekut, tijelo je poliedar, a plohe su *strane*. Zato valjak nije omeđen s tri *strane*, nego s tri plohe. Ali je tetraedar omeđen s četiri plohe koje su i *strane* ili još točnije i trokuti. Dakle, umjesto *strana* smijemo koristiti *ploha*, a obratno ne smijemo.

Duljina i dužina

U našem se školskom sustavu učenici već u nižim razredima osnovne škole susreću s pojmovima *dužina* i *duljina*. U daljnjem školovanju usvoje i nazive za neke posebne dužine, kao što su: *stranica*, *težišnica*, *dijagonala*, *brid*, *tetiva* i slično. Također susretnu se i s ovim pojmovima: *visina*, *simetrala* (stranice, odnosno kuta), *polumjer* i još nekima. Problem nastaje kada se poistovjećuju *dužina* i *duljina te dužine*, to jest poistovjećuju se *skup točaka* i *realan* (*nenegativan*) *broj*.

Nije teško u našim udžbenicima pronaći sljedeći zadatak. U trokutu ABC je zadano: stranice $a = 7$, $b = 10$ i težišnica iz vrha C, $t = 8$. Izračunaj treću stranicu trokuta. Stranice, kao i težišnice trokuta su dužine, to jest skupovi točaka i besmisleno je kazati da je stranica jednaka 7. To što je zadano jest *duljina stranice*. Zato zadatak treba pisati ovako: U trokutu ABC je zadano: duljine stranica $a = 7$, $b = 10$ i duljina težišnice iz vrha C, $t = 8$. Izračunaj duljinu treće stranice trokuta.

Potpuno obratan problem pojavljuje se u vezi pojma *visine* (trokuta, paralelograma, trapeza, stošca, piramide i slično). Visina se ne definira kao *dužina*, nego kao *udaljenost*. Tako se visina trokuta definira kao udaljenost (jednog) vrha od nasuprotne stranice, a visina krnje piramide kao udaljenost ravnina osnovaka te piramide. Zbog toga trokut ima tri, a krnja piramida samo jednu visinu.

Vidimo da su u riječi *visina* sadržana već metrička svojstva. Zato je besmisleno kazati duljina visine trokuta je jednaka 8 cm. Visinu trokuta često poistovjećujemo s dužinom kojoj su rubne točke jedan vrh i ortogonalna projekcija tog vrha na pravac nasuprotne stranice. Nacrtamo li za tupokutan trokut tri takve dužine, vidjet ćemo da se te dužine uopće ne sijeku. Mnogo smo puta čuli i pročitali tekst poučka: visine trokuta sijeku se u jednoj točki. Upravo smo vidjeli da to ne vrijedi za svaki trokut. Zato taj poučak, koji će vrijediti za svaki trokut, treba iskazati ovako: *Pravci visina trokuta sijeku se u jednoj točki*. (U nastavku poučka obično se kaže da je ta točka *ortocentar* trokuta i navedu se metrička svojstva ortocentra.)

Zato je sljedeći zadatak ispravno napisan.

U trokutu ABC je zadano: duljine stranica $a = 7$, $b = 10$ i visina iz vrha C, $v = 8$.

Slično je i s promjerom i polumjerom kružnice, koji korijenima svojih nazivima (*mjer*) sugeriraju da ti pojmovi imaju metrička obilježja.

Zato ćemo umjesto, *duljina polumjera kružnice je jednaka* 11, kazati: *polumjer kružnice je jednak* 11.

Os, simetrala

Pojam *osi* uvodi se pri nekim geometrijskim transformacijama i govorimo o *osi* simetrije, i *osi* vrtnje (rotacije). Isto tako, pri uvođenju koordinatnog sustava (na pravcu, u ravnini, u prostoru), definiramo (jednu, dvije ili tri) koordinatne *osi*.

U svakom od tih slučajeva *os* jest *pravac*.

Već se u osnovnoj školi učenici susretnu s pojmom *simetrale*, i to kao simetrala dužine, ili pak simetrala kuta. Simetrala je, po definiciji, *pravac* i nema metrička obilježja. Zato je besmisleno kazati: duljina simetrale zadane dužine je jednaka 9. Isto vrijedi i za *os*. Rečenica: *Duljina osi ordinata je 5*, kao i rečenica: *Duljina osi stošca je jednaka 10* nemaju smisla.

Ipak, nije teško u zbirkama zadataka naći ovakve podatke: *Duljina simetrale kuta pri vrhu B trokuta ABC je jednaka* 12, ili *duljine osi elipse su jednake* 10 *i* 6. Ovakvi podaci ne stvaraju nikakve zabune, jer se zna točno što oni znače.

Simetrala kuta trokuta prolazi jednim vrhom i uvijek siječe (za razliku od pravca visine) nasuprotnu stranicu u jednoj točki. Zato se prethodno definira *duljina simetrale kuta trokuta*, kao udaljenost vrha trokuta od sjecišta te *simetrale* s nasuprotnom stranicom, odnosno kao duljina odreska te *simetrale* koji je unutar trokuta.

Elipsa ima dvije *osi simetrije*, što kraće kažemo da ima dvije *osi*. Znamo da su te *osi* međusobno okomite i sijeku se u *središtu* elipse i svaka siječe elipsu u dvjema točkama, to jest svaka određuje po jednu tetivu elipse. Te su tetive različite duljine, a zbog činjenice da prolaze središtem elipse zovu se promjeri (dijametri) elipse. Duljine tih promjera definiraju se kao duljine *osiju* elipse. Te su duljine, kako je već rečeno, različite i imaju posebne nazive: *glavna (velika)* i *sporedna* (*mala*) *os elipse*. Slično se definiraju i duljine *osi* hiperbole. Samo jedna *os* (simetrije) siječe hiperbolu, zbog čega se duljine tih *osi* zovu *realna* i *imaginarna os*.

Kazali smo da su duljine *osi* elipse različite. Lako zamislimo elipsu jednakih duljina *osi* i isto tako lako zaključimo da je takva elipsa zapravo kružnica. Zato kažemo da je kružnica posebna elipsa, ili još točnije; kružnica je *jednakoosna* elipsa.

U našoj stručnoj literaturi uobičajilo se da se hiperbola kojoj su duljine *osiju* jednake zove *jednkostrana* ili pak *jednakostranična*. Hiperbola nema ni *strana* ni *stranica*, zbog čega takva hiperbola može biti samo *jednakoosna*.