

Lorenski križ

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
Alija Muminagić, F. Nykøbing, Danska

Križ pripada među najstarije općepoznate simbole. Geometrijski ga opisujemo kao dvije crte ili pruge koje se sijeku pod kutom od 90° pri čemu se jedna ili obje pruge dijele popola, ali postoje i brojne varijante. Lorenski¹ križ je varijanta latinskog križa, a ističe se dvjema poprečnim prugama nejednake duljine. Poznat je kao simbol francuskog domoljublja, nadbiskupsko je obilježje, a nalazi se i na slovačkom grbu i zastavi.

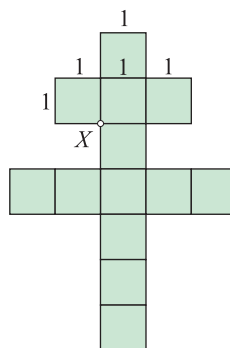


Oblik lorenskog križa mijenjao se kroz povijest. Lorenski križ iz 12. st. simbol je Ivane Orleanske – poprečne pruge su jednake duljine i smještene na jednakoj udaljenosti od krajeva okomite pruge.

Lorenski križ iz II. svjetskog rata simbol je francuskog pokreta otpora i Charlesa de Gaullea – poprečne pruge su nejednake duljine i smještene u sredini i gornjoj polovici. Upravo taj oblik križa zanimljiv je i s matematičkog gledišta.



Na slici 1 nacrtan je lorenski križ. Svi kvadrati su dimenzije 1×1 . Dakle, površina tog križa je 13. Promotrimo ovakav [zadatak](#):



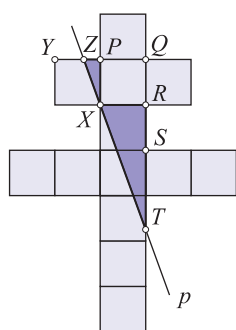
Slika 1.

Točkom X (na slici 1) povucite pravac p , koji površinu križa dijeli na dva jednaka dijela.

¹ Pokrajina Lorraine ili Anjou je u istočnoj Francuskoj. U njoj je živjela Ivana Orleanska.

Rješenje: Uvedimo oznake kao na slici 2. Uvjet iz zadatka je da pravac p dijeli površinu križa na dva jednaka dijela. Dakle, svaki dio ima površinu $\frac{13}{2}$. Sa slike vidimo da je:

$$P_{\Delta ZQT} = \frac{13}{2} - 4 = \frac{5}{2}. \quad (1)$$



Slika 2.

Neka je

$$|ZP| = a \quad \text{i} \quad |RT| = b. \quad (2)$$

Dalje je $\Delta ZPX \sim \Delta XRT$, i iz te sličnosti slijedi:

$$\frac{|ZP|}{|PX|} = \frac{|XR|}{|RT|}$$

ili zbog (2):

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{b}, \quad \text{tj.} \quad a \cdot b = 1. \quad (3)$$

Površinu trokuta ΔZQT možemo odrediti i ovako:

$$\begin{aligned} P_{\Delta ZQT} &= \frac{1}{2} \cdot |ZQ| \cdot |QT| = \frac{1}{2}(|ZP| + 1)(1 + |RT|) \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2}(a + 1)(1 + b) = \frac{1}{2}(a + ab + 1 + b) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2}(a + b + 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Sada iz (1) i (4) dobivamo:

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(a + b + 2)$$

i odavde

$$a + b = 3. \quad (5)$$

Rješavanjem sustava jednačbi (3) i (5), nalazimo

$$a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad b = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tako smo stigli skoro do kraja. Prisjetimo se:

Definicija: Neka točka Z dijeli dužinu $\overline{YP}$ tako da vrijedi:

$$|YP| : |YZ| = |YZ| : |PZ|. \quad (6)$$



Slika 3.

Dužinu $\overline{YZ}$ zovemo zlatnim rezom (lat. *sectio aurea*) dužine $\overline{YP}$ (slika 3). Ako su sa $m = |YP|$, $n = |YZ|$, $m - n = |PZ|$ označene duljine tih dužina, tada (6) možemo pisati u obliku:

$$m : n = n : (m - n) \quad \text{ili} \quad n^2 + mn - m^2 = 0, \quad (7)$$

i (7) je kvadratna jednačba po n , a kako točka Z leži na dužini $\overline{YP}$, rješenje $n = \frac{m}{2}(\sqrt{5} - 1)$ jednačbe (7), daje duljinu zlatnog reza dužine $\overline{YP}$. Odavde slijedi da je omjer cijele dužine $\overline{YP}$ i zlatnog reza $\overline{YZ}$:

$$\begin{aligned} \frac{|YP|}{|YZ|} &= \frac{m}{n} = \frac{m}{\frac{m}{2}(\sqrt{5} - 1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \end{aligned}$$

U našem slučaju je $m = 1$ i $n = 1 - a$, pa je:

$$\frac{1}{1 - a} = \frac{1}{1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

što znači da je dužina $\overline{YZ}$ zlatni rez dužine $\overline{YP}$. Čitateljima je poznato kako se konstruira zlatni rez dužine $\overline{YP}$, pa se sada lako dobije točka Z koja s točkom X jednoznačno određuje traženi pravac p . Time je ovaj zanimljiv zadatak riješen.

LITERATURA

- 1/ Frandsen, J., *De(t) gyldne snit – i kunst, natur og matematik*, 2. vdgave, Systime A/S, Danska, 1999.
- 2/ Palman, D., *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.
- 3/ Anić, V., Goldstein, I., *Rječnik stranih riječi*, drugo izdanje, Novi Liber, Zagreb, 2007.
- 4/ *Nova enciklopedija*, I. P. "Vuk Karadžić", Beograd, 1977.