Matematički paradoksi

Tri zanimljiva zadatka

Sanja Sruk, Zagreb

Pročitavši naslov vjerojatno ste pomislili na poznati paradoks o Ahileju i kornjači (*Zenonov paradoks*). Broj matematičkih paradoksa nije malen i većina ih je vezana uz problem beskonačnosti i uz vjerojatnost. Ovdje će biti riječi o tri zanimljiva paradoksa koji su dovoljno jednostavni da uz odgovarajuću interpretaciju mogu biti razumljivi i učenicima.

Primjer 1. *Koliko je* $1-2+3-4+5-6+\ldots$?

Još sredinom 18. stoljeća Leonhard Euler došao je do zaključka da je rezultat $1/4$. Iako je Euler osoba kojoj se vjeruje, i prosječni učenik petog razreda uočio bi da je to nemoguće jer zbroj cijelih brojeva mora biti cijeli broj. Zar je Euler pogriješio?

$1-2+3-4+\ldots$ beskonačni je niz čiji su članovi prirodni brojevi s alternirajućim predznakom. Opći član niza je $a_n = n\cdot(-1)^{n-1}$ i niz je očito divergentan. Označimo li sa $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} n\cdot(-1)^{n-1}$ sumu prvih m članova niza imamo:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1-2=-1\\
S_3 &= 1-2+3=2\\
S_4 &= 1-2+3-4=-2\\
S_5 &= 1-2+3-4+5=3\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Kao što vidimo, i niz parcijalnih suma je divergentan, a dodamo li $S_0 = 0$, sume generiraju skup $\mathbf{Z}$.

Pa ipak, kad bi postojala suma beskonačno mnogo članova niza, označimo je sa S, ona bi uistinu iznosila $1/4$ kao što pokazuje sljedeći račun:

$$
\begin{aligned}
4S &= (1-2+3-4+\ldots)\\
&\quad+(1-2+3-4+\ldots)\\
&\quad+(1-2+3-4+\ldots)\\
&\quad+(1-2+3-4+\ldots)\\
&= (1-2+3-4+\ldots)+1\\
&\quad+(-2+3-4+5-\ldots)+1\\
&\quad+(-2+3-4+5-\ldots)-1\\
&\quad+(3-4+5-6+\ldots)\\
&= 1+[(1-2-2+3)+(-2+3+3-4)\\
&\quad+(3-4-4+5)+(-4+5+5-6)+\ldots]\\
&= 1+[0+0+0+0+\ldots]=1.
\end{aligned}
$$

Dakle, $4S=1$ pa je onda $S=1/4$.

Do istog su rezultata na različite načine, tj. različitim sumiranjem došli i Cesaro, Borel i drugi matematičari. Pitanje je samo ima li smisla računati sumu ako unaprijed znamo da ona ne postoji. I Euler je uočio tu paradoksalnost i predložio svojevrsnu generalizaciju riječi “suma”.

Pomoću Taylorove formule:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

pri čemu je a točka u kojoj neprekidna funkcija ima sve derivacije, funkciju $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ možemo (uz $a = 0$) razviti u red:

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

Iako taj razvoj postoji za $|x| < 1$, možemo pogledati limes funkcije:

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-x)^{n-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}.$$

Primjer 2. *Moja prijateljica ima dvoje djece.*

a) *Jedno od njih je djevojčica. Kolika je vjerojatnost da je i drugo njeno dijete djevojčica?*

b) *Njeno starije dijete je djevojčica. Kolika je vjerojatnost da je i drugo njeno dijete djevojčica?*

Slična formulacija ovog problema potječe od Martina Gardnera koji je 1959. u časopisu *Scientific American* objavio “Problem dvoje djece” koji je kasnije postao poznat i kao “Problem gđe Smith”. Intuicija nam govori da je u oba slučaja vjerojatnost $1/2$ budući da spol djeteta ne ovisi o spolu i dobi drugog djeteta. No ipak nije tako.

Označimo moguće kombinacije djece $\{$MM, MŽ, ŽM, ŽŽ$\}$, pri čemu je M dječak, a Ž djevojčica i prvo slovo predstavlja starije dijete.

a) U ovom slučaju imamo mogućnosti $\{$MŽ, ŽM, ŽŽ$\}$ pa je vjerojatnost da je drugo dijete djevojčica $1/3$.

b) Sada su mogućnosti $\{$ŽM, ŽŽ$\}$ pa je tražena vjerojatnost $1/2$.

Ovaj je paradoks usko povezan s Bertrandovim paradoksom kutije (1889.).

Imamo tri kutije. U prvoj su dva zlatna novčića, u drugoj dva srebrna, a u trećoj jedan zlatni i jedan srebrni. Nasumce biramo jednu kutiju i iz nje izvlačimo jedan novčić. Ako je taj novčić zlatan, kolika je vjerojatnost da je i drugi novčić u kutiji zlatan? Naizgled je vjerojatnost $1/2$, no točan je odgovor $1/3$. Obilježimo kutije simbolima (ZZ), (SS) i (ZS) prema novčićima koji se nalaze u njima. Ako smo izvukli zlatni novčić, znamo da je riječ o kutiji (ZZ) ili (ZS), ali mi zapravo nismo birali kutiju nego novčić, pa imamo sljedeće mogućnosti:

1) Izvukli smo Z iz ZS i drugi novčić je srebrni.

2) Izvukli smo Z_1 iz ZZ i drugi novčić je zlatni.

3) Izvukli smo Z_2 iz ZZ i drugi novčić je zlatni.

Zbog toga je tražena vjerojatnost $2/3$.

Da je zaista tako, eksperimentalno je potvrdio Warren Weaver 1950. godine. Kutije je zamijenio praznim kartama, a umjesto novčića koristio je crvene i crne oznake na suprotnim stranama karata. Nasumce je izvukao jednu od tri karte i ako se pokazala crvena oznaka, kladio se da je i druga strana crvena. Iako je onima, koji su se kladili, izgledalo da im je vjerojatnost dobitka 50%, “kladioničar” je zarađivao pobjeđujući u dva od tri slučaja.

Paradoksi vezani uz vjerojatnost nisu paradoksi u smislu da vode do logičke kontradikcije, već je matematička istina kontradiktorna s intuicijom. To se vidi i na sljedećem primjeru.

Primjer 3. *Kolika je vjerojatnost da u skupini od 23 ljudi barem dvoje ima rođendan istoga dana? Pretpostavka je da godina ima 365 dana, da nema blizanaca i da su svi dani jednako vjerojatni da budu nečiji rođendan.*

Iako intuitivno ne izgleda tako, ta je vjerojatnost veća od 50%. Štoviše, već za skupinu od 57 ljudi vjerojatnost da barem dvoje ima rođendan istoga dana veća je od 99%. Označimo vjerojatnost da barem dvije od 23 osobe imaju rođendan isti dan s $P(A)$. Jednostavnije je izračunati vjerojatnost da u toj skupini nema dvoje ljudi rođenih istog dana, tj. $P(\overline{A})$, pa je onda $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Događaj

$\overline{A}$ može se opisati kao 23 neovisna događaja, pa je $P(\overline{A}) = P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot \ldots \cdot P(23)$ pri čemu $P(k)$ označava vjerojatnost da k-ta osoba nema rođendan isti dan kao i prethodno promatranih $k-1$ osoba. $P(1)$ je očito $1 = 365/365$, $P(2) = 364/365$, $P(3) = 363/365, \ldots, P(23) = 343/365$ pa je:

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365} \\ &= \left(\frac{1}{365}\right)^{23} \cdot (365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343) \\ &= \left(\frac{1}{365}\right)^{23} \cdot \frac{365!}{342!} \\ &= 0.4927, \end{aligned}$$

i zato je $P(A) = 1 - 0.4927 = 0.5073 = 50.73\%$.

Poopćimo li zadatak, za $n \leq 365$ imamo:

$$\begin{aligned} P(\overline{n}) &= \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots (365-n+1)}{365^n} \\ &= \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} \end{aligned}$$

i $P(n) = 1 - \dfrac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$.

Rezultati za neke n dani su u tablici.

n	$P(n)$
10	11.7%
20	41.1%
23	50.7%
30	70.6%
50	97%
57	99%
100	99.99997%

Želite li da netko od 23 osobe ima rođendan nekog određenog dana, primjerice na vaš rođendan, vjerojatnost za to je $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{23} = 6.1\%$. Da bi vjerojatnost bila barem 50%, u skupini bi trebalo biti 253 ljudi, što je više od očekivanih $365/2 = 182.5$.

I što reći na kraju? Ako uskoro slavite rođendan, neka vam je sretan; ako se volite kladiti, budite oprezni; a ako se slučajno namjeravate utrkivati s kornjačom, nipošto joj nemojte dati prednost jer je, baš kao ni Ahilej, nikad nećete stići.

in memoriam

Benoit B. Mandelbrot

(1924. – 2010.)

U Cambridgeu (Massachusetts) 14. listopada ove godine umro je Benoit M. Mandelbrot, francusko-američki matematičar rođen u Poljskoj. Mandelbrot je poznat kao otac fraktalne geometrije. Njemu pripada i izbor naziva "fraktal" a njemu u čast prihvaćen je i naziv Mandelbrotov skup. Svoj radni vijek proveo je u IBM-ovom istraživačkom centru Thomas J. Watson.