Kako izračunati obujam i oplošje lopte?

Josip Kličinović, Zagreb

Jedan sat dodatne nastave s učenicima osmih razreda proveo sam u školskoj dvorani za tjelesni odgoj. Promatrali smo razne geometrijske likove, mjerili i izračunavali oplošja i obujme tijela koja smo zapazili. Učenici su primijetili da su strunjače kvadri, čunjevi krnji stošci, prečke valjci... Za većinu tijela smo lako računali oplošja i obujme. Primjerice, obujam i oplošje valjka i stošca uspješno smo računali korištenjem konca i metra.

U jednom trenutku, dok sam promatrao učenike kako žustro raspravljaju, mjere, računaju, prekinuo me glas učenika koji je u ruci držao nogometnu loptu:

— Kako ćemo izmjeriti obujam i oplošje lopte?

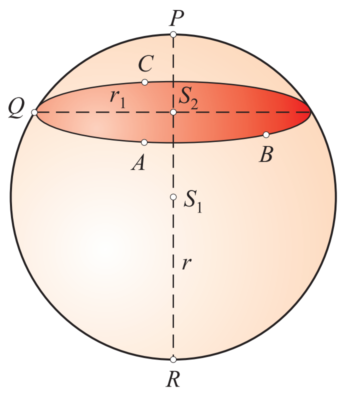
Nasmiješio sam se očekujući to pitanje, okupio učenike i započeli smo raspravu o načinu kako izmjeriti obujam i oplošje kugle. S obzirom da su učenici koji polaze dodatnu nastavu matematike već upoznali formulu za računanje obujma i oplošja kugle, znali su da im je za taj račun potreban polumjer kugle. Ali kako ga izračunati? Većina učenika predložila je da koncem izmjerimo opseg najveće kružnice na lopti, pa onda iz toga izračunamo polumjer lopte. Neki su odmah rekli da to možda neće biti dovoljno precizno. Morali smo pribjeći nekoj drugoj metodi.

Tada sam im ispričao kako je taj problem riješio arapski matematičar Thabit ibn Qurra[1] (836. – 901.). Učenicima nisam dao gotovo rješenje već smo zajedno kroz heuristički razgovor došli do rješenja. Na šestar smo montirali flomaster, priredili veći list papira i uobičajeni pribor za geometrijsko crtanje.

Evo kako je problem riješio Ibn Qurra. Na kugli (lopti) je šestarom oko proizvoljne točke P opisao kružnicu k i na toj kružnici odabrao je točku Q. Prenoseći dužinu $\overline{PQ}$ šestarom na ravnalo, izmjerio je njezinu duljinu $|PQ| = p$ i taj je podatak zapisao. Zatim je na kružnici k prizvoljno odabrao točke A, B, C.

Što određuju točke A, B, C? Učenici s lakoćom odgovaraju da one određuju trokut ABC, a da je kružnica na kojoj leže te točke kružnica opisana trokutu ABC. Prenoseći dužine šestarom na ravnalo, izmjerili smo međusobnu udaljenost točaka A, B i C te smo na pripremljenom papiru konstruirali trokut ABC. Zatim smo tom trokutu na papiru opisali kružnicu i izmjerili duljinu polumjera r_1 kružnice k opisane trokutu ABC. Za provjeru smo trokutu ABC konstruirali jednu visinu i izračunali po-

[1] Thabit ibn Qurra je bio i sjajan astronom. Prema Koperniku, Ibn Qurra je odredio sideričku (zvjezdanu) godinu Zemlje 365 dana 6 h 9 min 12 sec (greška od 2 sekunde).



vršinu tog trokuta, a potom smo se koristeći formulu $P = \dfrac{abc}{4r_1}$ uvjerili u ispravnost mjerenja duljine polumjera kružnice k, naravno, uz očekivanu malu pogrešku pri mjerenju. Potom smo na papiru skicirali kuglu (loptu) i obilježili sve što dosad znamo, te smo sve daljnje analize radili na skici.

Ibn Qurra je na skici odabrao točku R tako da kut $\sphericalangle PQR$ bude pravi kut. Pitam učenike – zašto? Neki su se dosjetili i odgovorili – kad tako odaberemo točku R, onda je dužina $\overline{PR}$ promjer kugle! Učenici su se jednostavno koristili Talesovim poučkom i ispravno ga primijenili na kuglu. Prelaskom s kružnice u ravnini na kuglu u prostoru objašnjavam učenicima metodom analogije: kako promjer kružnice prolazi središtem tetive na koju je okomit, tako će i promjer kugle $\overline{PR}$ prolaziti središtem S_2 kruga k na koji je okomit.

Nadalje promatramo dva trokuta: $\triangle PQS_2$ i $\triangle PRQ$ su slični što smo lako ustvrdili promatrajući kutove tih trokuta, pa vrijedi: $\dfrac{r_1}{q} = \dfrac{p}{2r}$, odnosno $\dfrac{r_1}{\sqrt{(2r)^2 - p^2}} = \dfrac{p}{2r}$. Sređivanjem izraza dobijemo $r = \dfrac{p^2}{2\sqrt{p^2 - r_1^2}}$ te uvrštavanjem poznatih podataka izračunamo polumjer lopte.

Proveli smo nekoliko mjerenja. Premda su mjerenja bila različita, konačni je rezultat bio približno jednak. Ovdje donosimo rezultate jednog mjerenja:

$$
\begin{aligned}
p &= 6.6\,\text{cm},\\
|AB| &= 6.8\,\text{cm},\\
|AC| &= 9.5\,\text{cm},\\
|BC| &= 12.4\,\text{cm},\\
r_1 &= 6.3\,\text{cm},\\
r &= 11.45\,\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Kako znamo da su mjerenja i račun približno ispravni? FIFA (franc. *Fédération Internationale de Football Association*) propisuje da opseg glavne kružnice nogometne lopte mora biti između 68 i 70 cm. Naš rezultat pokazuje da je opseg glavne kružnice nogometne lopte 71.9 cm. Zaključujemo da je naša školska nogometna lopta prenapuhana.

Na kraju se vraćamo na početno pitanje – koliko je oplošje i obujam nogometne lopte? Sada s lakoćom računamo koristeći forumule za oplošje i obujam kugle. Jedan učenik ima ideju kako možemo provjeriti naš račun, barem približno – “rastavimo” oplošje nogometne lopte! Drugi učenici su ga zbunjeno pogledali, a on je pojasnio: nogometna lopta se sastoji od 12 pravilnih peterokuta i 20 pravilnih šesetrokuta, pa zbrajajući površine tih likova možemo izračunati oplošje nogometne lopte te iz tog podatka izračunati radijus lopte i na kraju volumen lopte. Izvrsna ideja! Ostavit ćemo to za neki drugi sat. Naravno, ti rezultati bi bili samo približni jer moramo uzeti u obzir da nogometna lopta nije savršena kugla već krnji ikosaedar.

Na kraju sata rezimirali što smo sve napravili i uvidjeli ljepotu matematike. Primjenjujući i povezujući gradivo prethodnih razreda i aktualno gradivo riješili smo početni problem koji je naizgled bio popriličnoj težak i kompliciran. Uz malu pomoć Thabita ibn Qurre.

LITERATURA

1/ http://en.wikipedia.org/wiki/FIFA

2/ http://en.wikipedia.org/wiki/Football_%28ball%29

3/ http://en.wikipedia.org/wiki/Th%C4%81bit_ibn_Qurra

4/ http://www.matematika.ba/istorija-matematike