

Brojevi i brojke

Andelko Marić, Sinj



Redni brojevi

Znamo da se u matematici prirodni brojevi definiraju kao **glavni (kardinalni)** i **redni (ordinalni)**. Glavni brojevi su: jedan (1), dva (2), tri (3), . . . , a redni: prvi (1.), drugi (2.), treći (3.), Zapazimo da se iza svakoga rednog broja piše točka. Redni se brojevi, u svakodnevnom životu, najčešće koriste pri zapisivanju nadnevaka, to jest dana, mjeseca i godine. Ovo bi, točnije, trebalo kazati: dana u mjesecu, mjeseca u godini i godine. Tako, na primjer, za drugi dan desetog mjeseca (listopada) dvije tisuće i desete godine zapisujemo: 2. 10. 2010., ili 2. listopada 2010. (godine). Nekada je bilo pravilo (što se sve više napušta) da se redni broj mjeseca piše rimskom brojkom. U tom slučaju navedeni nadnevak bi se zapisao: 2. X. 2010. Kako vidimo, dan se zapisuje i izgovara u *nominativu* odgovarajućega rednog broja, mjesec u *genitivu* rednog broja, odnosno naziva mjeseca, i godina također u *genitivu* rednog broja.

Ovo je sve jednostavno i izgleda da mora biti svakome jasno te da je suvišno o tome i govoriti, a

kamoli pisati. Međutim, u praksi to nije tako. Na televiziji, ili u tisku često možemo čuti ili pročitati nadnevke iskazane, ili zapisane ovako: 3. siječanj, 5. kolovoz, 17. prosinac, . . . , drugi treći, dvadeseti sedmi i slično.

Što zapravo znači zapis: *17. prosinac 2010. godine?*

To bi trebalo značiti da u 2010. godini ima više (barem 17) mjeseci koji se svi nazivaju *prosinac* i da se radi o sedamnaestom u nizu tih prosinaca.

Nedavno je jedan voditelj na televiziji, u povodu dana koji se nekada više a sada manje svečano slavi, rekao: Nekada je bio 8. *mart*, a danas je to 8. *ožujak*. Nijedan od ovih iskaza ne spada u hrvatski standardni jezik. Ovaj voditelj sigurno se ne bi složio s tvrdnjom da je izraz 8. *marta* pravilno, a 8. *ožujak* nepravilno napisan, odnosno izrečen.

Isto tako, najčešće tako govore političari, umjesto 2. *ožujka* odnosno *drugi trećega*, čujemo *drugi treći*, što je, naravno nepravilno.

Broj, znamenka, brojka

Tri riječi u ovom podnaslovu pripadaju hrvatskom matematičkom nazivlju i svaka od njih ima posebno, točno određeno, značenje. Iako ih se, ponekad čak i u matematičkim krugovima poistovjećuje, te riječi nisu istoznačnice. Poistovjećivanje tih pojmova je kao da kažemo da riječi *glas* i *slovo* znače isto.

Broj je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova. Brojevi se u matematici uvode postupnim proširivanjem skupova brojeva, počevši od prirodnih, do kompleksnih. Zapis prirodnog broja, u određenom brojevnom sustavu, jest **brojka**. Tako su primjerice: 17, 123 i 2568 brojke kojima (u desetinskom sustavu) zapisujemo brojeve: *sedamnaest, sto dvadeset i tri*, odnosno *dvije tisuće pet stotina šezdeset i osam*.

Zapis prirodnog broja je jednoznačan, ali samo u određenom brojevnom sustavu. Tako, na primjer, brojke: 17, 20 001 i 122 znače jedan te isti broj i to *sedamnaest*, ali u različitim sustavima i to konkretno s osnovama: 10, 2 i 3. Ako se zapisu nekoga prirodnog broja ne naznači o kojem se brojevnom sustavu radi, onda se dogovorno smatra da je to sustav s osnovom 10, to jest desetinski (decimalni ili dekadski) sustav.

Ostaje nam još raspraviti: što je to *znamenka*?

U sustavu s osnovom n , broj nula i početnih $n - 1$ prirodnih brojeva zapisujemo posebno dogovorenim oznakama. Te oznake zovemo *znamenka*. Tako, znamenke sustava s osnovom 10 su: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9; a osnovom 7 su: 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

Svi ostali brojevi pišu se pomoću dviju ili više tih znamenaka. Kažemo da su brojevi jednaki ili veći od n višeznamenkasti brojevi tog sustava.

Očito je da samo za brojeve *nula* i prirodne brojeve manje od n *znamenka* i *brojka* znače isto.

Također treba razlikovati pojmove *nula* i *ništica*. *Nula* je broj, a *ništica* pripadna znamenka (ujedno i brojka). Isto je i za pojmove: *jedan* i *jedinica*.

Brojevi su promjenljiva vrsta riječi

Zadržimo se još malo na brojevima i navedimo još jedan primjer nepravilnog govora, odnosno pisanja. Radi se o uporabi padeža glavnih brojeva. Brojevi: *jedan, dva, tri* i *četiri* imaju sve padeže hrvatskog jezika. Ti padeži, primjerice za riječ *dva* su: *dva, dvaju, dvama, dva, (o) dva, (o) dvama, (s) dvama*. Ostali (prirodni) brojevi nemaju padeže. Navedimo i to da brojevi *jedan* i *dva* imaju i rodove: *jedan, jedna, jedno; dva, dvije, dva*.

Još mi i danas u ušima odjekuje pravilo koje se, prije više od pola stoljeća, kao svojevrsni refren ponavljalo u našim učionicama: **broj se s imenicom slaže u broju, rodu i padežu**. To pravilo kao da više ne vrijedi.

Često su, u našim udžbenicima a i drugoj matematičkoj literaturi mogu pročitati izrazi poput ovih:

- *Sjecište dva pravca je točka P.*
- *Međusobna udaljenost dvije točke je jednaka 5.*
- *Pravac p siječe krivulju k u tri točke.*

Sigurno će se netko upitati: Što ovdje nije u redu?

Umjesto odgovora, promijenimo sadržaje navedenih izraza.

Zamislimo da je, umjesto jednog pravca iz prvog primjera, kružnica. Tada bismo zasigurno zapisali: *sjecište pravca i kružnice je točka P*. Vidimo da su obje riječi *pravac* i *kružnica* u genitivu. Zato i izraz *dva pravca* treba pisati u genitivu. To jest, prva rečenica pravilno napisana glasi: *Sjecište dvaju pravaca je točka P*.

Umjesto odnosa dviju točaka iz druge rečenice, promatrajmo sličan odnos (jedne) točke i (jednog) pravca. Bez sumnje ćemo zapisati: *Udaljenost točke od pravca je jednaka 5*. Kada bi druga rečenica bila ispravno napisana, tada bi i rečenica:

Međusobna udaljenost točka i pravac je jednaka 5. Opet se radi o zamjeni genitiv-nominativ. Zato pravilno napisana ta rečenica glasi:

Međusobna udaljenost **dvaju pravaca je jednaka** 5.

Neka pravac p i krivulja k , iz trećeg primjera imaju samo jednu točku zajedničku. Rečenica će tada prijeći u: *Pravac p siječe krivulju k u **jednoj točki***. Slijedom onoga kako je ta rečenica napisana, trebalo bi pisati: ... **u jedna točka**. Sada je, kako vidimo, umjesto lokativa napisan (opet) nominativ. Zato je posljednju rečenicu pravilno napisati ovako: *Pravac p siječe krivulju k u **trima točkama***.

Ovo je još jedan rezultat pogubnog utjecaja jednog (trenutačno) dominirajućeg jezika. Taj utjecaj, ne samo da u naš jezik infiltrira bespotrebne tuđice, nego nagriza sam sustav, to jest duh jezika, što se očituje u postupnom gubljenju padeža. A to je još opasnije. Koliko je to već daleko otišlo, najbolje pokazuje sljedeći događaj. Nedavno je, posljednja od ove tri rečenica, pravilno napisana, bila u jednom matematičkom udžbeniku koji je bio na prosudbenom povjerenstvu nadležnog ministarstva. Među primjedbama je bila jedna u kojoj se traži da se ta rečenica napiše "ispravno", to jest onako kako smo pokazali da nije ispravno. *Sapienti satis!*

Realni brojevi su kompleksni brojevi

Prije nekoliko godina, na jednom seminaru za nastavnike matematike raspravljalo se, između ostaloga, i o raščlambi jednoga javnog ispita. Sjećam se zadatka koji je glasio ovako. *Koji su od zadanih brojeva realni, a koji kompleksni?* Ti zadani brojevi su bili navedeni u tekstu zadatka, a koji su to bili, za samu narav zadatka nije ni bitno. Ono što me iznenadilo bilo je rješenje zadatka. Najprije su, od zadanih brojeva, navedeni oni koji su realni, što je i naglašeno. Zatim su navedeni svi ostali, to jest oni brojevi koji nisu realni.

Učenici, u drugom razredu srednje škole, nauče da je skup **realnih** brojeva podskup skupa **kompleksnih** brojeva. To znači da je svaki realan broj ujedno i kompleksan. Naravno, obratno ne vrijedi.

Zato je prvi dio odgovora točan, a drugi dio nije. Tu je trebalo odgovoriti da su svi zadani brojevi kompleksni.

Možda bi trebalo nešto mijenjati u metodici nastave matematike. Pri uvođenju skupa kompleksnih brojeva, učenici često taj skup shvate kao nešto potpuno novo, a ne kao proširenje skupa *realnih* brojeva.

Ovakvom shvaćanju možda pridonosi i stereotipno iskazivanje naravi rješenja kvadratne jednadžbe. Obično se kaže da narav rješenja kvadratne jednadžbe zavisi o diskriminanti jednadžbe, što je potpuno u redu. Zatim se kaže, ako je diskriminanta nenegativna, rješenja su *realna*, a ako je ona pozitivna, rješenja su *kompleksna*. Obzirom da su ovo novi nastavni sadržaji i to potpuno apstraktni, te uzevši u obzir i uzrast učenika, nije teško razumjeti da učenik može zaključiti na način kako je riješen promatrani zadatak.

Trebalo bi nastojati da učenik usvoji činjenicu da su rješenja kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima (*u svakom slučaju*) kompleksni, a u posebnom slučaju, ti *kompleksni* brojevi su *realni*.

Rješenje, korijen, nultočka

Kada se u drugom razredu srednje škole obrađuje kvadratna jednadžba, kaže se da ta jednadžba ima dva *rješenja* ili dva *korijena* koja su, ujedno i *nultočke* pripadne kvadratne funkcije. Smijemo li odatle zaključiti da su ti pojmovi, ili barem neka dva od njih istoznačnice? Kažimo odmah da to nisu istoznačnice, iako bi se za kvadratnu funkciju moglo reći da su riječi *rješenja* i *korijeni* istoznačnice. Broj koji uvršten, umjesto nepoznanice u promatranu jednadžbu, prevodi tu jednadžbu u jednakost, to jest zadovoljava jednadžbu, jest **rješenje** jednadžbe.

Postupak rješavanja kvadratne jednadžbe svodi se na određivanje (drugog) korijena nekog broja. Slično, rješavanje *algebarske* jednadžbe višeg stupnja svodi se na određivanje korijena s višim eksponentom. Takav postupak zove se rješavanje jednadžbe u *radikalima* (latinski *radix* – *korijen*). Za-

to se uobičajilo rješenja takvih jednadžba zvati i *korijeni*. Poznato je da algebarske jednadžbe stupnja višeg od četvrtog nisu rješive u radikalima. Jednadžbe koje nisu, ili se ne mogu svesti na algebarske, zovu se *transcendentne* jednadžbe. Zato, za broj koji je rješenje neke *logaritamske* ili *trigonometrijske* jednadžbe ne ćemo kazati da je to *korijen* te jednadžbe.

Pojam **nultočke** definira se pri proučavanju *funkcija*. Za zadanu funkciju f , broj a koji pripada domeni te funkcije i koji je rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, jest **nultočka** funkcije f . Zaključujemo; iako *nultočka* funkcije i *rješenje* pripadne jednadžbe su jedan te isti broj, ti pojmovi nisu istoznačnice. Pojam *nultočka* nije najsretnije odabran, jer to uopće nije *točka*. Zato se, ponedgje, umjesto tog termina koristi *nula* ili *nulište*.

Na kraju, još nešto o pojmu **rješenje** jednadžbe. Navest ćemo primjer pogrešne uporabe tog termina.

Često se poistovjećuje pojam *rješenje* jednadžbe i *postupak, način, metoda* rješavanja te jednadžbe.

Ako je neki zadatak riješen na više načina, onda se, ponedgje, to naznačuje kao: *prvo rješenje, drugo rješenje* i tako redom. To što se navodi kao (prvo, drugo, ...) *rješenje*, nije uopće rješenje jednadžbe, nego način ili metoda rješavanja jednadžbe. Uostalom, kako jednadžba koja, primjerice, ima samo jedno rješenje, može imati *prvo rješenje, drugo rješenje, ...?*

Zadano i dano

U svakom se jeziku od neke riječi, raznim predmetcima (prefiksima) tvore nove riječi s manje ili više sličnim, ali i s potpuno različitim značenjima. Tako, od glagola *dati*, možemo dobiti nove riječi: *dodati, izdati, prodati, predati, zadati*. Nikoje dvije od tih riječi nisu istoznačnice, a isto tako nijedna od njih nije istoznačnica s polaznim glagolom *dati*. Zato zaključujemo da ni pridjevi *zadano* i *dano* nisu istoznačnice. Ovo navodim zato, jer se u posljednjih deset do dvadeset godina, te dvije riječi u

našoj matematičkoj literaturi poistovjećuju. Točnije rečeno, riječ *zadan* (*zadana, zadano, zadani*) nepravilno se potiskuje riječju *dan* (*dana, dano, dani*). Najčešće se to događa u tekstu nekog zadatka. Sama riječ *zadatak* izvedena je od glagola *zadati*, a ova, kako smo rekli, od glagola *dati*. U svakom zadatku postoje neki podatci koji su poznati. Stručnim jezikom kažemo da su ti podatci *zadani*, a ne *dani*. U matematici kažemo da je nešto **zadano**, ako je potpuno (u svim pojedinostima) određeno. Neki matematički objekt može biti zadan na više različitih načina. Podsjetimo se *zadanosti* trokuta, funkcije, niza i slično.

Zato treba kazati:

- Trokut *ABC* je *zadan* duljinama stranica.
- Funkcija f je *zadana* formulom.
- Niz (a_n) je *zadan* rekurzijom.

Promatrajmo ove dvije rečenice: *Danu* (darovanu) knjigu, on je pročitao za dva dana. Njemu je *dana* sva vlast. Ovdje ne možemo riječ *danu* (*dana*) zamijeniti riječju *zadanu* (*zadana*). Ali, ako je učenik tu knjigu morao pročitati za školsku literaturu, kazat ćemo: *Zadanu* knjigu učenik je pročitao za dva dana.

U običnom govoru, uz riječ *zadatak*, postoji i riječ *zadaca*. Te dvije riječi su praktično istoznačnice. Međutim, u matematičkom nazivlju te riječi ne označuju isti pojam. *Zadaca* je skup od nekoliko različitih *zadataka* koji čine *zadani* (a ne *dani*) pisani ispit.

Riječ *zadatak* ima još jedno posebno značenje i to u *metodici*. U uvodnom dijelu svakog udžbenika iz metodike nastave matematike navode se *zadatci nastave matematike*.

Navedimo, na kraju, da nije dobro kazati: *zadatci matematike*, nego *zadatci iz matematike*, ali je ispravno reći: *zadatci nastave matematike*.